7/12

今日の話題
- Lagrange の未定乗数法（訂正）
- 予想問題 2 の解答例
- Lagrange の未定乗数法の原理

Lagrange の未定乗数法.

関数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ の $x_1 \cdots x_n$ が

$$g_1(x_1 \cdots x_n) = g_2(x_1 \cdots x_n) \cdots = g_m(x_1,\cdots,x_n) = 0$$

をみたしながら変化するとき，$f(x_1,\cdots,x_n)$ の最大 or 最小値を求める方法はあるか？

⇒ 最大 or 最小の候補を与える方法はある. ~~次の行列を考える.~~

$$\left(\frac{\partial (f - \lambda_i g_i)}{\partial x_j} \right) \leftarrow (i,j) \text{ 成分.}$$

例 $x_1 = x \quad y_1 = y, \quad g_1 = 0$ のとき.

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial (f-\lambda_1 g_1)}{\partial x} & \dfrac{\partial (f-\lambda_1 g_1)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

この行列が 0 行列になり，さらに

$$g_1 = g_2 = \cdots = g_m = 0$$

をみたす $(x_1, \cdots, x_n)$ が最大 or 最小の候補を与える.

例題.

$$f(x,y,z) = z$$

$$g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

$$g_2(x,y,z) = x + y + z$$

$g_1 = g_2 = 0$ をみたしつつ (x,y,z) が動くとき，f の最大値，最小値の候補は

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial (f-\lambda_1 g_1)}{\partial x} & \dfrac{\partial (f-\lambda_1 g_1)}{\partial y} & \dfrac{\partial (f-\lambda_1 g_1)}{\partial z} \\ \dfrac{\partial (f-\lambda_2 g_2)}{\partial x} & \dfrac{\partial (f-\lambda_2 g_2)}{\partial y} & \dfrac{\partial (f-\lambda_2 g_2)}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2\lambda_1 x & -2\lambda_1 y & 1-2\lambda_1 z \\ -\lambda_2 & -\lambda_2 & 1-\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g_1 = g_2 = 0$$

これを解くと、

$F = f - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2$ を考えなければダメだった。

$(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2)$の式

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = 0$$

を解いたものが最大,最小の候補

この場合

$$F = z - \lambda_1(x^2+y^2+z^2-1) - \lambda_2(x+y+z)$$

なので

$$\begin{cases} -2\lambda_1 x - \lambda_2 = 0 & \cdots ① \\ -2\lambda_1 y - \lambda_2 = 0 & \cdots ② \\ 1 - 2\lambda_1 z - \lambda_2 = 0 & \cdots ③ \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 & \cdots ④ \\ x + y + z = 0 & \cdots ⑤ \end{cases}$$

① + ② + ③

$$1 - 2\lambda_1 \underbrace{(x+y+z)}_{0 \,\leftarrow\, ⑤} - 3\lambda_2 = 0$$

$$1 - 3\lambda_2 = 0 \qquad \lambda_2 = \frac{1}{3}$$

$$-2\lambda_1 x - \frac{1}{3} = 0 \qquad x = -\frac{1}{6\lambda_1}$$

$$-2\lambda_1 y - \frac{1}{3} = 0 \qquad y = -\frac{1}{6\lambda_1}$$

$$1 - 2\lambda_1 z - \frac{1}{3} = 0 \qquad z = \frac{1}{3\lambda_1}$$

④に代入

$$\frac{1}{36\lambda_1^2} + \frac{1}{36\lambda_1^2} + \frac{1}{9\lambda_1^2} - 1 = 0$$

$$1 + 1 + 4 - 36\lambda_1^2 = 0$$

$$\lambda_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$(x, y, z) = \left(\pm\frac{\sqrt{6}}{6}, \pm\frac{\sqrt{6}}{6}, \mp\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

$f(x,y,z) = z$ の Max … $\frac{\sqrt{6}}{3}$

Min … $-\frac{\sqrt{6}}{3}$

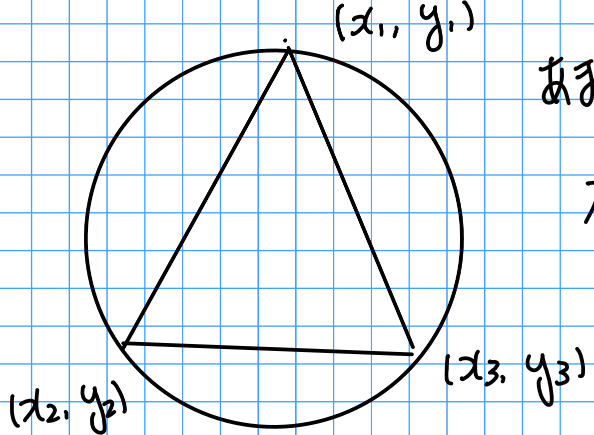
※一般の場合は

$$F = f - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2 - \lambda_3 g_3 \cdots - \lambda_m g_m$$

の $\dfrac{\partial F}{\partial x_1} = \cdots = \dfrac{\partial F}{\partial x_n} = \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_1} = \cdots \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_m} = 0$

の解が最大,最小の候補を与える.

予想問題2の解答例



あまり良くないやり方

左のようにおくと

3角形の面積

$$\frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{matrix} \right\|$$

$$= \frac{1}{2}\left|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right|$$

$x_1^2 + y_1^2 - 1 = 0 \leftarrow g_1 = 0$

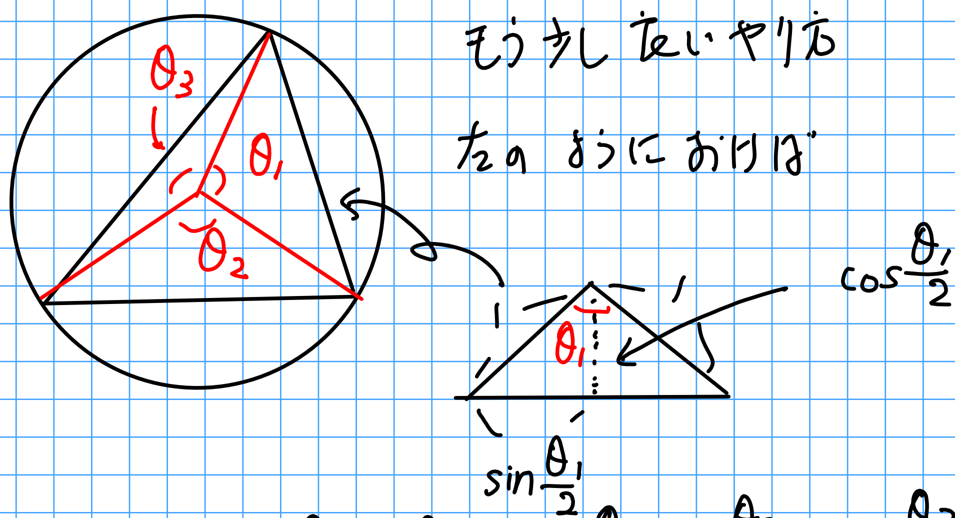
$x_2^2 + y_2^2 - 1 = 0 \leftarrow g_2 = 0$

$x_3^2 + y_3^2 - 1 = 0 \leftarrow g_3 = 0$

こうして Lagrange の未定乗数法を適用すると

x_1 y_1 x_2 y_2 x_3 y_3 λ_1 λ_2 の 8個の

変数の連立方程式を解くことになる.



もう少し良いやり方

左のようにおけば

面積 $\sin\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_1}{2} + \sin\frac{\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_2}{2} + \sin\frac{\theta_3}{2}\cos\frac{\theta_3}{2}$

$$= \frac{1}{2}(\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \sin\theta_3)$$

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 2\pi$$

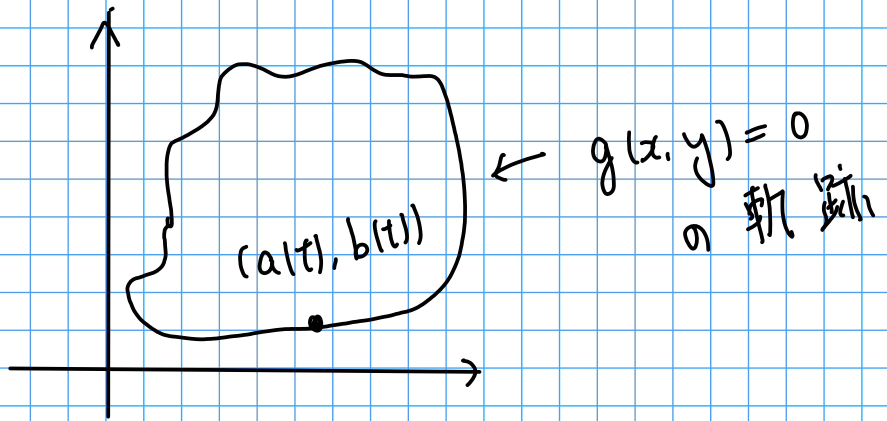
$$F = \frac{1}{2}(\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \sin\theta_3) - \lambda_1(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - 2\pi)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta_1} = \frac{\partial F}{\partial \theta_2} = \frac{\partial F}{\partial \theta_3} = \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = 0$$

を解けば良い。これだと変数は4つに減る。

・Lagrangeの未定乗数法のからくり。

$f(x, y)$ の x, y が $g(x, y) = 0$ をみたしながら動く場合のみ説明する。



上の曲線のパラメーター表示を

$(x, y) = (a(t), b(t))$ とおく。

すると $f(a(t), b(t))$ の最大，最小を求めれば良いことになる。よって最大，最小の候補として

$f'(a(t), b(t)) = 0$ となる t があげられる。

上の式を書き直すと，

$$\frac{\partial f}{\partial x} a'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} b'(t) = 0 \quad \cdots ①$$

一方 $g(a(t), b(t)) = 0$ より

$$\frac{\partial g}{\partial x} a'(t) + \frac{\partial g}{\partial y} b'(t) = 0 \quad \cdots ②$$

①，② から $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ $\left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right)$ は共にベクトル $(a'(t), b'(t))$ に直交する。

よって $\left(\frac{\partial f}{\partial x} \ \frac{\partial f}{\partial y}\right) \parallel \left(\frac{\partial g}{\partial x} \ \frac{\partial g}{\partial y}\right)$

すなわち $\left(\frac{\partial f}{\partial x} \ \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \lambda \left(\frac{\partial g}{\partial x} \ \frac{\partial g}{\partial y}\right)$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial r \partial \theta} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot -r\sin\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\, r\cos\theta.\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(-r\sin\theta) + \frac{\partial}{\partial r}(-r\sin\theta)\cdot\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot r\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial}{\partial r}\, r\cos\theta$$

$$= \left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\sin\theta\right\} - r\sin\theta + -\frac{\partial f}{\partial x}\sin\theta$$

$$+ \left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\cos\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\sin\theta\right\} r\cos\theta$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial y}\cos\theta$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-r\cos\theta\sin\theta) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-r\sin^2\theta + r\cos^2\theta) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\, r\sin\theta\cos\theta$$

$$- \frac{\partial f}{\partial x}\sin\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\theta$$

$$\frac{\partial\,\cdot}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x}\cdot\cos\theta + \frac{\partial}{\partial y}\sin\theta$$