7/5.

今日の話題

・多変数の微積分（3変数以上）

・Lagrange の未定乗数法.

復習. Taylor展開.

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

この式と公式

$$\frac{df(g_1(t), g_2(t), \cdots, g_n(t))}{dt} = (後で書く)$$

を組みあわせることで, 多変数関数の Taylor 展開を得ることができ, さらにそれを用いて極値をもとめることができる.

定義 n変数関数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ の変数 x_i に関する偏微分とは

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 \cdots, x_i + h, \cdots x_n) - f(x_1 \cdots x_n)}{h}$$

定義 $f(x_1, \cdots, x_n)$ が $(x_1 \cdots x_n) = (a_1 \cdots a_n)$ で微分可能とは,

$$f(a_1 + h_1, \cdots, a_n + h_n) - f(a_1 \cdots a_n) = A_1 h_1 + \cdots + A_n h_n + \varepsilon(h_1 \cdots h_n)$$

$$\lim_{h_1 \cdots h_n \to 0} \frac{\varepsilon(h_1, \cdots, h_n)}{\sqrt{h_1^2 + \cdots + h_n^2}} = 0 \quad A_i : 定数$$

となるときを言う.

※ これは $h_1 \cdots h_n$ が小さいとき,

$$f(a_1 + h_1, \cdots, a_n + h_n) - f(a_1, \cdots, a_n) \fallingdotseq A_1 h_1 + \cdots + A_n h_n$$

ということである.

補題 $f(x_1, \cdots, x_n)$ が微分可能，
$g_i(s_1, \cdots, s_m)$ $(1 \leq i \leq n)$ が s_i に関して偏微分可能のとき，

$$\frac{\partial f(g_1(s_1, \cdots, s_m), \cdots, g_n(s_1, \cdots, s_m))}{\partial s_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g_j}{\partial s_i} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial g_1}{\partial s_i} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial g_n}{\partial s_i}$$

"説明"

$$f(g_1(\cdots, s_i+h, \cdots) \cdots g_n(\cdots s_i+h, \cdots)) - f(g_1(\ s_i\ ) \cdots g_n(\cdots s_i \cdots))$$

$$\fallingdotseq \frac{\partial f}{\partial s_i} h$$

$$g_j(\cdots s_i+h \cdots) - g_j(\cdots s_i \cdots)$$

$$\fallingdotseq \frac{\partial g_j}{\partial s_i} h$$

$$f(g_1(\cdots s_i+h, \cdots), \cdots, g_n(\cdots s_i+h, \cdots))$$

$$\fallingdotseq f\left(g_1(\cdots s_i \cdots) + \frac{\partial g_1}{\partial s_i} h, \cdots, g_n(\cdots s_i \cdots) + \frac{\partial g_n}{\partial s_i}\right)$$

$$\fallingdotseq f(g_1(\cdots s_i \cdots), \cdots, g_n(\cdots s_i \cdots)) + A_1 \frac{\partial g_1}{\partial s_i} h + \cdots + A_n \frac{\partial g_n}{\partial s_i} h$$

ここで A_i について考える.

$$f(x_1, \cdots x_i+h, \cdots, x_n) - f(x_1, \cdots x_n)$$

$$\fallingdotseq A_1 \cdot 0 + \cdots + A_i h + \cdots A_n \cdot 0 = A_i h$$

両辺を h で割って $h \to 0$ とすると，

$$A_i = \partial f / \partial x_i$$

よって $\fallingdotseq \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g_j}{\partial s_i} h$

例 $f(\cancel{x}, \cancel{y}, \cancel{z})$ に対し（赤字: x_1, x_2, x_3）

$$\frac{d f(a_1+b_1t,\ a_2+b_2t,\ a_3+b_3t)}{dt}$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{dg_j}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1}b_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}b_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}b_3$$

同様に

$$\frac{d^n f(a_1+b_1t,\ a_2+b_2t,\ a_3+b_3t)}{dt^n}$$

$$= \sum_{p+q+r=n} \frac{n!}{p!\,q!\,r!}\frac{\partial^n f}{\partial x_1^p \partial x_2^q \partial x_3^r} b_1^p b_2^q b_3^r$$

これを利用すれば

$$f(x_1, x_2, x_3)$$

$$= f(a_1, a_2, a_3) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1-a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_2-a_2)$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_3-a_3) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1-a_1)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_2-a_2)^2\right.$$

$$\left.+ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(x_3-a_3)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1-a_1)(x_2-a_2)\cdots\right)\right)$$

※ $\tan x$ の $x=0$ のまわりの Taylor 展開

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 \cdots}{1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 \cdots}$$

ここで $\frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + y^3 + \cdots\cdots$ より

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 \cdots\right)$$

$$\times\left(1 + \left\{\frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 \cdots\right\} + \left\{\frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 \cdots\right\}^2 + \left\{\frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 \cdots\right\}^3 \cdots\right)$$

$$= x + \underbrace{\left(-\frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{2!}x^3\right)}_{= \frac{1}{3}x^3}$$

$$\frac{16}{120} = \frac{2}{15}$$

$$+\left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{4}\right)x^5$$

$$\frac{1}{120} - \frac{1}{12} - \frac{1}{24} + \frac{1}{4} = -\frac{9}{120} + \frac{5}{24} = \frac{25-9}{120}$$

・Lagrangeの未定乗数法

Q. 変数 $x_1 \cdots x_n$ が

$g_1(x_1 \cdots x_n) = \cdots = g_m(x_1 \cdots x_n) = 0$

をみたしながら動くとする。このとき、関数

$f(x_1 \cdots x_n)$ の最大もしくは最小を求める

方法はあるか?

A. 最大,最小の"候補"を求める方法はある

$F_i = f - \lambda g_i \quad (1 \leq i \leq m)$

とし、次の連立方程式を解く。

$\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j} = 0, \quad \dfrac{\partial F_i}{\partial \lambda} = 0$

この解が、最大 or 最小の候補である。

例題 $g_1(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

をみたしながら x, y が動くとき

$f(x, y) = xy$ の Min, Max を求めよ。

$F = f(x, y) - \lambda g(x, y) = xy - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

に対し、

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= y - 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= x - 2\lambda y = 0. \end{aligned}\right\}$$

$x - 2\lambda \cdot 2\lambda \cdot x = 0$

$\Longleftrightarrow x(1 - 4\lambda^2) = 0$

$x = 0$ or $4\lambda^2 = 1$

$\Downarrow$ $y = \pm 1$ $\Downarrow$ λ の値なし 解なし。

$\Downarrow$ $\lambda = \pm \frac{1}{2}$ $\Downarrow$ $x = \pm y$ $\Downarrow$ $(x, y) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1 = 0$

得られた解を $f(x, y) = xy$

に代入すると、

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdots f(x, y) = \frac{1}{2}$

$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdots$

$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdots f(x, y) = -\frac{1}{2}$

別解. $x = \cos\theta, \quad y = \sin\theta$

$f(x, y) = xy = \cos\theta \sin\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$

Q. 辺の長さの和が3である3角形で面積が最大のものを求めよ。

A. 3角形の3辺の長さを a, b, c とする。
このとき、その3角形の面積は
$s = (a+b+c)/2$ とすれば
$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ と分かる。
この2乗が最大となる a, b, c を求めれば良い。今 $S = 3$ なので

$$\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-a\right)\left(\frac{3}{2}-b\right)\left(\frac{3}{2}-c\right) =: f(a, b, c)$$

$$\underbrace{a+b+c-3}_{\parallel \atop g(a,b,c)} = 0$$

$F = f - \lambda g$ とおき、

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \frac{\partial F}{\partial b} = \frac{\partial F}{\partial c} = \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$$

$$\iff -\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-b\right)\left(\frac{3}{2}-c\right) = -\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-a\right)\left(\frac{3}{2}-c\right) = -\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-a\right)\left(\frac{3}{2}-b\right) = -\lambda, \quad a+b+c-3 = 0$$

$a \neq \frac{3}{2}$ のとき、 $b = c$

$b = c \neq \frac{3}{2}$ であれば $a = c$
つまり $a = b = c$ これから $a = b = c = 1$
$\lambda = -\frac{3}{8}$

$b = c = \frac{3}{2}$ であれば $a = 0$ $\lambda = 0$

$a = \frac{3}{2}$ のとき、 $\lambda = 0$ よって $b = \frac{3}{2}$ $c = 0$
又は $b = 0$ $c = \frac{3}{2}$

以上の値を面積の式に代入すれば
最大となるのは $a = b = c = 1$ のとき、
すなわち正三角形のときであることがわかる。