6/21.

今日の話題

- テイラー展開（続き）
- 微分（難）
- 変数変換
- 3変数以上の関数

- 多変数の関数のテイラー展開

…　定義に従って計算すればできるが、その計算はかなり大変

例　$f(x,y) = \sin xy$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\cos xy \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x\cos xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -y^2\sin xy \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \cos xy - xy\sin xy \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x^2\sin xy$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = -y\sin xy - y\sin xy - xy^2\cos xy$$

このように微分をくり返すごとに式が複雑になる。さらにテイラー展開を $(x,y)=(0,0)$ のまわりで考えるときには、偏導関数に $(x,y)=(0,0)$ を代入するが、このとき

$$\frac{\partial^n f}{\partial^k x\, \partial^{n-k} y}(0,0) = \begin{cases} 0 & k \neq n-k \\ & k = n-k \quad k\text{偶数} \\ \pm 1 & \text{その他} \end{cases}$$

となり、頑張って計算したのに消えてしまう、ということがある。それよりは、

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 \cdots$$

この x に xy を代入すれば

$$\sin xy = xy - \frac{1}{3!}(xy)^3 + \frac{1}{5!}(xy)^5 \cdots$$

と既知のテイラー展開をうまく使うと良い。

Q.　$\sin(x+y)$

A.　$= x+y - \frac{1}{3!}(x+y)^3 + \frac{1}{5!}(x+y)^5 \cdots$

$$= x+y-\frac{1}{3!}(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)$$

$$+\frac{1}{5!}(x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5)$$

$$\cdots$$

Q. $\tan(x+2y)$ の $(x,y)=(0,0)$ のまわりのテイラー展開を x^3, x^2y, xy^2, y^3 の項まで求めよ.

・微分

1変数関数 $f(x)$ が $x=\alpha$ で微分可能とは

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$$

が存在するときであった. これを多変数に拡張することを考える. 上の式を唯2変数にする, という定義はうまくいかない.

そこで1変数の微分可能, という定義をもう一度考え直す必要がある. 定義式で

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}=A$$

とおくと,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\alpha+h)-(f(\alpha)+Ah)}{h}=0$$

この式を元にして微分可能, という概念を次のように捉え直す.

$f(x)$ が $x=\alpha$ で微分可能とはある定数 A が存在して

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\alpha+h)-(f(\alpha)+Ah)}{h}=0$$

定義 $f(x,y)$ が $(x,y)=(\alpha,\beta)$ で微分可能とはある定数 A, B が存在して

$$\lim_{h,k\to 0} \frac{f(\alpha+h,\beta+k)-(Ah+Bk+f(\alpha,\beta))}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

となるときを言う。

補題. 関数 $f(x,y)$ が偏微分可能で、さらに偏導関数 $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ が連続であれば $f(x,y)$ は微分可能.

∵ $f(x+h, y+k) - f(x,y)$ を考える.

$$f(x+h, y+k) - f(x,y)$$

$$= f(x+h, y+k) - f(x+h, y) + f(x+h, y) - f(x,y)$$

平均値の定理より

$$= \frac{\partial f}{\partial y}(x+h, y+\theta k)k + \frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta' h, y)h$$

これから

$$\frac{f(x+h, y+k) - f(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}\cdot h - \frac{\partial f}{\partial y}k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \left\{\frac{\partial f}{\partial y}(x+h, y+\theta k) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right\} k/\sqrt{h^2+k^2} + \left\{\frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta' h, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right\} h/\sqrt{h^2+k^2}$$

$h, k \to 0$ とすると

$$\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} \leqq 1 \qquad \frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}} \leqq 1$$

$\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ は連続なので、2つの { } は共に 0 に収束する. よって定義から $f(x,y)$ は微分可能である.

・変数変換 (= 合成関数の微分の公式の多変数版)

$$f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)$$

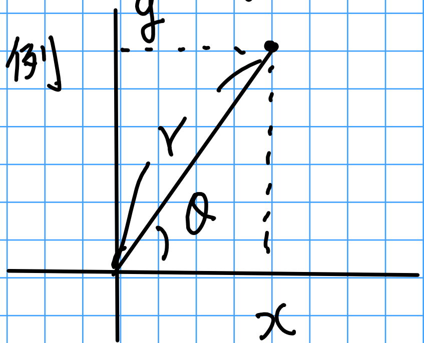
補題

$$\frac{\partial f(g(x,y), h(x,y))}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial f(g(x,y),\,h(x,y))}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial h}{\partial y}$$

※ $$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(g(x,y),\,h(x,y)) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(g(x,y),\,h(x,y)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial f/\partial x \\ \partial f/\partial y \end{pmatrix}$$

例



$(x, y) = (r, \theta)$

$f(x,y)$ に対し、

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f(r\cos\theta,\, r\sin\theta)}{\partial r}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial (r\cos\theta)}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial (r\sin\theta)}{\partial r}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta$$

特に $f(x,y) = x^2 + y^2 = r^2$

$$\partial f/\partial r = 2r = 2x\cos\theta + 2y\sin\theta$$

$$= 2r\cos^2\theta + 2r\sin^2\theta$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial (r\cos\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial (r\sin\theta)}{\partial \theta}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot(-r\sin\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot(r\cos\theta)$$

特に $f(x,y) = \frac{y}{x}$ のとき、

$$f(x,y) = \frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \tan\theta$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial\, r\cos\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial\, r\sin\theta}{\partial \theta}$$

$$= -\frac{y}{x^2}\cdot(-r\sin\theta) + \frac{1}{x}\cdot r\cos\theta$$

$$= +\frac{r^2\sin^2\theta}{r^2\cos^2\theta} + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

補題の証明,

$f(x,y)$ は微分可能なので

$$f(x+h,\ y+k) - f(x,y) - Ah - Bk = \varepsilon(h,k)$$

とおくと $\displaystyle\lim_{h,k\to 0} \varepsilon(h,k)/\sqrt{h^2+k^2} = 0$

特に $k=0$ とすれば

$$\varepsilon(h,0) = f(x+h,y) - f(x,y) - Ah$$

$$\frac{\varepsilon(h,0)}{h} = \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} - A$$

$h\to 0$ で 上の式は 0 に収束する.

すなわち $A = \partial f/\partial x$ 同様に $B = \dfrac{\partial f}{\partial y}$

よって

$$f(g(x+k,y),\ h(x+k,y)) - f(g(x,y),h(x,y))$$

$$= \varepsilon(\quad,\quad) + \frac{\partial f}{\partial x}\{g(x+k,y) - g(x)\} + \frac{\partial f}{\partial y}\{h(x+k,y) - h(x)\}$$

よって

$$\frac{\quad}{k} = +\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\quad}{k} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\quad}{k} + \varepsilon(\quad)/k$$

$k\to 0$ とすると $\varepsilon(\quad)/k \to 0$ となるので

$$\frac{\partial f(g(x,y),h(x,y))}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial h}{\partial x} \ 〃$$