6/14

期末試験 7/26 (予定) ← 都合がつかない → 6月中に申し出.

・多変数関数
 ・偏微分
 ・Taylor展開

定義 2変数 x, y の関数 $f(x, y)$ とは, x, y に応じて唯1つ数が定まるものをいう

例 x^y … このままでは $x<0$ のときに定義されない.

$$(-1)^{1/2} = i, -i$$

$$(-1)^{1/3} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}, -1$$

x^y $(x>0)$ は関数. これは唯1つ値が定まる.

定義 2変数関数 $f(x, y)$ の x に関する偏微分とは

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$ ← y を定数と思って微分.

のことを言う. この極限が存在するとき $f(x, y)$ は x で偏微分可能といい, 又この極限を $\frac{\partial f}{\partial x}$ と書く

※ ∂ 6の反対 デル 又は パーシャル と読む

例 $f(x, y) = x^y$ のとき,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y x^{y-1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^y \log x$$ ← x を定数と思って y で微分.

$$g(x, y) = \mathrm{Arctan} \frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot -\frac{y}{x^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

※ $(\mathrm{Arctan}\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

※ 合成関数の微分

$$\{f(g(x))\}' = f'(g(x))\, g'(x)$$

この式の証明を $f'(x)$ が連続のときに与える.

$f(g(x+h)) - f(g(x))$ を考える.

平均値の定理より.

$$f(g(x+h)) - f(g(x)) = f'(g(x+\theta h)) \times (g(x+h) - g(x))$$

$$(0 \leqq \theta \leqq 1)$$

この式から

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} f'(g(x+\theta h)) \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$= f'(g(x))\, g'(x)$$

定義 2変数関数 $f(x,y)$ が $(x,y)=(a,b)$ で連続とは,

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

ここで (x,y) は (a,b) にどのような近づき方をしても良いことに注意.

例 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - y^4}{x^4+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$x=y$ として $\to 0$ とすると,

$(0.1, 0.1)$, $(0.01, 0.01)$, $(0.001, 0.001)$ ....

$$f(x,y) = f(x,x) = 0 \quad (x \neq 0)$$

この近づけ方では $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

$x = 2y$ として $\to 0$ とすると.

$$f(2y, y) = \frac{15y^4}{17y^4} = \frac{15}{17}$$

高階微分　$f^{(n)}(x)$　（$f(x)$をn回微分する）
に対応するものも　考えることができる.

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$　$f(x,y)$をxで2回偏微分する.

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$　〃　y　〃

ここで

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$　yで偏微分して　xで偏微分する.

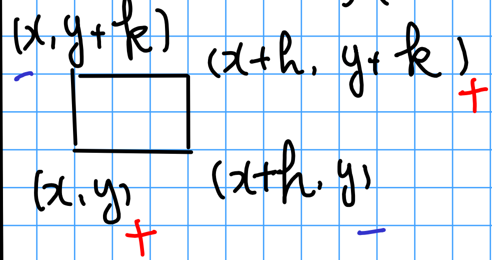
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$　x　〃　y　〃

一般には　上の2つは等しくない.

定理　$f(x,y)$の　2つの偏微分
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$
は　上の2つの関数が　連続のとき等しい.

まず　次の式を考える.

$$\Delta f = f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x,y)$$



$$\Delta f = \{f(x+h, y+k) - f(x, y+k)\} - \{f(x+h, y) - f(x,y)\}$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta h, y+k)\cdot h - \frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta h, y)\cdot h$$
$$= \left\{\frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta h, y+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta h, y)\right\} h$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x+\theta h, y+\underset{\text{エータ}}{\eta} k)\, hk$$

（上で2回平均値の定理を使った.）

$$\frac{\Delta f}{hk} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x+\theta h, y+\eta k)$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\Delta f}{hk} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$$

一方

$$\Delta f = \{f(x+h, y+k) - f(x+h, y)\} - \{f(x, y+k) - f(x, y)\}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial y}(x+h, y+\eta k)k - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+\eta k)k$$

$$= \left\{\frac{\partial f}{\partial y}(x+h, y+\eta k) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+\eta k)\right\}k$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x+\theta h, y+\eta k)hk$$

よって

$$\frac{\Delta f}{hk} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x+\theta h, y+\eta k)$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\Delta f}{hk} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

テイラー展開（1変数）

$f(x)$ の $x=a$ のまわりのテイラー展開とは

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3 + \cdots$$

これを利用して多変数のテイラー展開がどうなるかを見てみよう。

$f(x, y)$ の $(x, y) = (a, b)$ のまわりのテイラー展開を考えるために

$$g(t) = f(a + t(x-a), b + t(y-b))$$

x, y, a, b を定数と見る。すると上の関数は t の1変数関数となる。

補題　2変数関数 $f(x,y)$ の x, y に

$x = g_1(t)$, $y = g_2(t)$ を代入した

1変数関数 $f(g_1(t), g_2(t))$ を考える.

$$\{f(g_1(t), g_2(t))\}' = \frac{\partial f}{\partial x} g_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} g_2'(t)$$

$$\{f(g_1(t), g_2(t))\}''$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\{g_1'(t)\}^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} g_1'(t) g_2'(t) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\{g_2'(t)\}^2$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial x} g_1''(t) + \frac{\partial f}{\partial y} g_2''(t)$$

さらに $g_1^{(n)}(t) = g_2^{(n)}(t) = 0 \quad (n \geqq 2)$

であれば

$$\{f(g_1(t), g_2(t))\}^{(n)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}} \{g_1'(t)\}^k \{g_2'(t)\}^{n-k}$$

補題より

$$f(a + t(x-a), b + t(y-b))$$

$$= f(0) + f'(0)t + \frac{1}{2!} f''(\cancel{t}\,0) t^2 + \cdots$$

$$= f(a,b) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)\right)t$$

$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2\right)t^2 + \cdots$$

$t = 1$ とすると,

$$f(x,y) = f(a,b)$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-b)$$

$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x-a)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y-b)^2\right)$$

$$+ \cdots$$