6/7 期末日程案 7/26.

得点分布

90	80	70	60	50	40	30	20
3	4	15	6	10	18	6	1

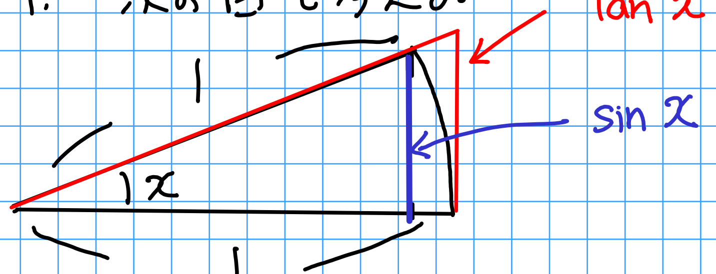
平均 56

各問平均 (25点満点)

1	2	3	4
12.1	19.6	21.6	3.3

解答例.

1. 次の図を考える.



上の扇形の弧の長さは $\frac{x}{200}\pi$

よって

$$\sin x < \frac{x}{200}\pi$$

$$\frac{\sin x}{x} < \frac{\pi}{200}$$

扇形と赤の3角形の面積を比較して

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{400}\pi < \frac{1}{2}\tan x$$

$$\iff \frac{x\pi}{200} < \tan x$$

これより $\frac{\pi}{200}\cos x < \frac{\sin x}{x}$

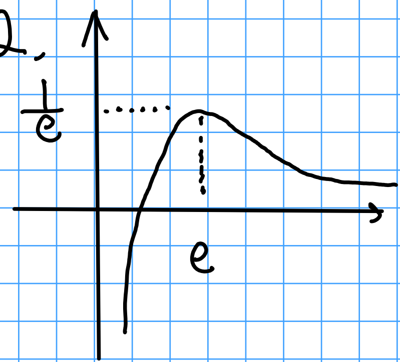
$x \to 0$ とすると

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{200}$$

部分点

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{\pi}{200}x}{\frac{\pi}{200}x} = 1 \quad +10.$$

2.



これが描けていれば +15

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log x}{x} = 0 \quad +5$$

上の極限が証明できて +5

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$$ の証明.

1) ロピタルの定理

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$ を使う.

この式をあてはめると,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0.$$

2) $g(x)=\sqrt{x}-\log x$ とおく.

$$g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}-2}{2x}$$

$x>4$ で $g'(x)>0$

又 $g(e^2)=e-2>0$ $(e=2.71828\cdots)$

$e^2>4$ より $g(x)>0$ $(x\geq e^2)$

$$\sqrt{x}>\log x>0 \quad (x\geq e^2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}}>\frac{\log x}{x}>0$$

$x\to\infty$ とすると はさみうちの定理より

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log x}{x}=0.$$

4. まず大ざっぱに考えて極限の値を予想する.

$\cos\frac{1}{n}$ ← n が十分大きければだいたい1.

$$\frac{\cos\frac{1}{2}+\cdots+\ \Big|\ \cos\frac{1}{n}+\cos\frac{1}{n+1}+\cdots\cdots+\cos\frac{1}{m}}{m}$$

だいたい1

和は だいたい $m-n$

m で割ったらゴミ

$$\lim_{m\to\infty}\frac{m-n}{m}=1.$$

解その1. $\cos\frac{1}{n}\fallingdotseq 1$ を利用

$h(x)=\cos x-1+x$ を考える.

$h'(x)=-\sin x+1\geqq 0$

$h(0)=0$

よって $h(x)\geqq 0$ $(x\geqq 0)$

$x=\frac{1}{n}$ を代入すれば

$$\cos\frac{1}{n}-1+\frac{1}{n}\geqq 0 \iff \cos\frac{1}{n}\geqq 1-\frac{1}{n}$$

この不等式より

$$\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right) \leqq \sum_{k=2}^{n}\cos\frac{1}{k}\Big/ n \leqq 1$$

$$\parallel$$

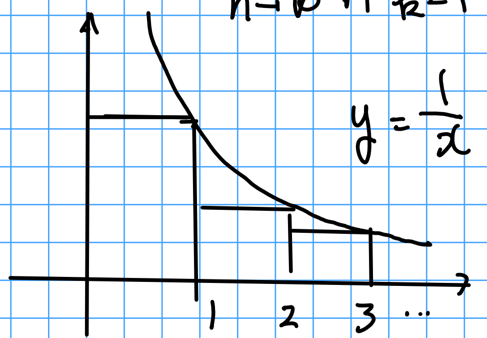
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)=1 \text{ を示せば良い.}$$

上の極限を変形すると

$$= 1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

ここで左図より



$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leqq \int_1^n \frac{1}{x}dx + 1$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leqq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\int_1^n\frac{dx}{x}+1\right\}$$

$$\parallel$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\log n+1)=0$$

$$0 \leqq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \text{ より } \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=0$$

解2.

補題

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ となる数列があったとする.

このとき,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\alpha$$

補題の証明.

収束の定義より, $\varepsilon>0$ ←イプシロン に対しある N があり

$$|a_n-\alpha|<\varepsilon \quad n \geqq N$$

この N を固定.

$a_1+\cdots+a_N = M$ とおく.

すると

$$\left|\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}-\alpha\right|$$

$$=\left|\frac{M-N\alpha+a_{N+1}-\alpha+\cdots+a_n-\alpha}{n}\right|$$

$$\leq \left|\frac{M-N\alpha}{n}\right| + \left|\frac{a_{N+1}-\alpha}{n}\right| + \cdots + \left|\frac{a_n-\alpha}{n}\right|$$

$$\leq \left|\frac{M-N\alpha}{n}\right| + \frac{(n-N)}{n}\varepsilon$$

n を十分大きくすれば 上の式は ~~いくらでも~~ ε より小さくなる.

つまり

$$\left|\frac{a_1+\cdots+a_n}{n} - \alpha\right| < \varepsilon$$

これは

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+\cdots+a_n}{n} = \alpha$$

を示している.

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7} \cdots = \frac{\pi}{4}$$

以下, 上の式の証明を目標とする.

$$\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots = \frac{\pi^2}{6}\right)$$

定義 逆三角関数

$\sin x$ の逆関数を $\mathrm{Arcsin}\, x$

$\cos x$ 〃 $\mathrm{Arccos}\, x$

$\tan x$ 〃 $\mathrm{Arctan}\, x$ とかく.

逆関数の定義域は $-1 \leq x \leq 1$ (Arcsin, Arccos)

値域は $-\pi < y \leq \pi$ とする.

$\mathrm{Arcsin}\, 0 = 0 \quad (\sin 0 = 0)$

$\mathrm{Arcsin}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} \quad \left(\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\mathrm{Arccos}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} \quad \left(\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\right)$

$\mathrm{Arctan}\, 1 = \frac{\pi}{4} \quad \left(\tan\frac{\pi}{4} = 1\right)$

これらの関数の微分を考える.

$(\mathrm{Arcsin}\, x)'$

逆関数の微分公式.

$f(g(x)) = x$ とする. これを両辺微分すると

$f'(g(x))\, g'(x) = 1$

$g'(x) \neq 0$ であれば $f'(g(x)) = \dfrac{1}{g'(x)}$

今 $\mathrm{Arcsin}(\sin x) = x$ なので

$$\mathrm{Arcsin}'(\sin x) = \frac{1}{\cos x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$$

$\sin x$ をあらためて x とおけば

$$\mathrm{Arcsin}' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

同様に

$$\mathrm{Arctan}\, x = \frac{1}{1+x^2}$$

さて $|x| < 1$ であれば

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots\cdots$$

辺々積分すれば

$$\mathrm{Arctan}\, x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots\cdots$$

$x=1$ を代入すると,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$