5/24.

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \cdots\cdots$$

を検証してみよう。

等比級数の公式

$$\sum_{k=0}^{n} a_{\cancel{k}} r^k = a_{\cancel{0}} r^0 + a_{\cancel{1}} r^1 + \cdots + a_{\cancel{n}} r^n$$

$$= a_{\cancel{0}} \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

特に $|r| < 1$ ならば

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a r^k = a + ar + ar^2 + \cdots\cdots$$

$$= \lim_{n\to\infty} a \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

$$= \frac{a}{1-r}$$

ここで $a=1$ $r = \cancel{x}\ {-x}$ と代入すると

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots\cdots$$

両辺を積分すると、

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \cdots$$

このように関数 $y=f(x)$ が

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

と無限に続く多項式(級数という)

として表せるとして様々な計算をしてきた。

1) このように書き直すことがどのような意味があるのか?

2) この表示は数学的に正しいのか?

今日の話題 テイラーの定理

定理 $y=f(x)$ が、$n+1$回微分可能とする。

このとき

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

とかける。ただし、c は x と a の間の数。

例 $f(x) = e^x$ $a=0$ とする。

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$(e^x)^{(k)} = e^x$ より $(e^0)^{(k)} = 1$

(k回微分してから 0 を代入)

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ より,

$$\lim_{n\to\infty} \left(e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k \right) = 0.$$

つまり, $\displaystyle e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$

$\displaystyle = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots$

より一般に

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} = 0$ ならば

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f^{(2)}(a)(x-a)^2 + \cdots$$

と分かる.

例

$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \cdots$

の両辺に $x = 2$ を代入すると.

(左辺) $= \log 3$

(右辺) $= 2 - \frac{1}{2}\cdot 4 + \frac{1}{3}\cdot 8 \cdots$ ← 発散.

実際 $\displaystyle\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} = (-1)^n \frac{1}{n+1} x^{n+1}$

$x = 2$ として $n \to \infty$ とすると発散する.

例

$\log(1.001)$ の値を求める.

$\| $

$\log(1 + 0.001)$

$= 0.001 - \frac{1}{2}(0.001)^2 + \frac{1}{3}(0.001)^3 \cdots$

$= 0.001 - 0.000005 + 0.000000333 \cdots$

$= 0.00099503 \cdots$

このように近似値を求めるのにこの展開は役立つ.

定理の証明のために 平均値の定理を思い出そう.

定理　関数 $F(x)$, $g(x)$ が微分可能であるとき,

$a<b$ に対して

$$\frac{F(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{F'(c)}{g'(c)} \qquad a<c<b$$

をみたす c が存在する.

この定理を $\cancel{f(x)}$ $F(x)$ を $f(x)-f(a)-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ として

$g(x)$ を $(x-a)^{n+1}$ として適用する.

$$F^{(m)}(x) = f^{(m)}(x) - f^{(m)}(a) - \sum_{k=m+1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{\cancel{k!}\,(k-m)!}(x-a)^{k-m}$$

より

$$F(a)=F'(a)=\cdots=F^{(n)}(a)=0$$

$$F^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)$$

$$g^{(m)}(x) = (n+1)\cdot n \cdots (n-m+2)(x-a)^{n-m+1}.$$

より, $g(a)=g'(a)=\cdots=g^{(n)}(a)=0$

平均値の定理より

$$\frac{F(x)}{g(x)} = \frac{F(x)-F(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{F'(c)}{g'(c)} = \frac{F'(c)-F'(a)}{g'(c)-g'(a)}$$

$$= \frac{F''(d)}{g''(d)} = \frac{F''(d)-F''(a)}{g''(d)-g''(a)} = \frac{F'''(e)}{g'''(e)}$$

$$\cdots = \frac{F^{(n+1)}(c)}{g^{(n+1)}(c)} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

はじめとさいごの項を抜きだすと,

$$\frac{f(x)-f(a)-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}{(x-a)^{\cancel{k}\,n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

整理すれば,

$$f(x)-f(a)-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

今後の内容

①. 偏微分.

$f(x, y)$ のような 2変数の関数を 1つだけ変数と見て微分すること.

例

$$\frac{\partial}{\partial x} x^2 y^2 = 2xy^2 \qquad \frac{\partial}{\partial y}(x + y^4) = 4y^3$$

② 多変数のテイラー展開

③ 変数変換

④ Lagrange の未定乗数法

Q. 3辺の長さの和 3 であるような 3角形で面積が最大となるものを求めよ.