5/10.

5/31 中間試験

- Taylor 展開とその応用.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Q. $\log 1.001$ の小数点以下 100 桁の数字はいくつか?

今日の Topics.

- 収束
- 微分の定義
- 基本的な関数の微分.

・収束

定義 数列 a_n が α に収束する, とは正数 ε に対し, ある $n(\varepsilon)$ があり,

$$n \geq n(\varepsilon) \qquad |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

となるときをいう.

補題 数列 a_n $(a_n > 0)$ が

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n < 1$$

であるとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$

例 $a_n = \dfrac{n^k}{2^n}$ を考える.

$$a_{n+1}/a_n = \frac{(n+1)^k}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^k} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^k$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = \frac{1}{2} < 1$$

よって補題より, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$

例 $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$ $(n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n)$

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0.$$

補題から $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$

※ n^k … nのk次の多項式

$\ll$ 2^n … 指数関数

$\ll$ $n!$ … ガンマ関数

大きさ比較

補題の証明

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = \alpha$ とおく. 仮定から $\alpha < 1$

収束の定義から 正数 ε に対し, ある $n(\varepsilon)$ があり,

$$\left| a_{n+1}/a_n - \alpha \right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha - \varepsilon < a_{n+1}/a_n < \alpha + \varepsilon$$

εを十分小さく取れば $\alpha + \varepsilon < 1$ と出来る. このような ε を1つ固定し, 対応する $n(\varepsilon)$ を N とする. このとき, $n \geq N$ ならば

$$a_{n+1}/a_n < \alpha + \varepsilon$$

よって $n > N$ ならば

$$a_n/a_{n-1} \cdot a_{n-1}/a_{n-2} \cdots a_{N+1}/a_N < (\alpha+\varepsilon)^{n-N}$$

$$\Leftrightarrow \quad a_n < (\alpha+\varepsilon)^{n-N} a_N$$

$0 < a_n$ より $\quad 0 < a_n < (\alpha+\varepsilon)^{n-N} a_N$

$n \to \infty$ とすると はさみうちの原理 より,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (\alpha+\varepsilon)^{n-N} a_N = 0$$

・収束についての注意

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

以上は a_n, b_n が収束するときのみ成立する.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ が収束すれば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$

しかし $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ だからといって

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$ が収束するとは限らない.

※ 無限に和を取る，すなわち

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$

では 和の順番を変えてはいけない.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdots = \log 2$$

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \cdots$$

$$\neq \log 2$$

・定数 e (Euler数 aka Napier数) について.

$e = 2.718\ 28\ 18\ 28\ 459 \cdots$

フ ナ ヒトハチ フタハチ ヒトハチフタハチ シゴク オイシイ.

は

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \qquad 0! = 1! = 1$$

と定義するが，高校では通常

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

と定義する. 2つの定義が等価であることを示す.

2項定理

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k a^k b^{n-k}$$

を使って lim の中の式を展開.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \left(\frac{1}{n}\right)^k$$

$${}_nC_k = \frac{n \cdots (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

分子

ここで $\dfrac{n \cdots (n-k+1)}{n^k} = \dfrac{n-1}{n}\,\dfrac{n-2}{n} \cdots \dfrac{n-k+1}{n}$

$$= \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

となるので

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

1より小さい.

$$\leqq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

つまり $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leqq e$

次に
$$\sum_{k=0}^{\cancel{n}\ m} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{\cancel{m}\ n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

（ $m=n$ なら $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ を展開したもの.

$m<n$ なら
$$\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$n\to\infty$ とすると,
$$\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \leqq \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

よって $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \leqq \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqq e.$

$m\to\infty$ とすれば, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$

・微分.

関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数とは
$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
のことを言う.

この極限が存在するとき, $f(x)$ は $x=a$ で微分可能という. 又 関数 $f(x)$ に対し

$t \longmapsto x=t$ における $f(x)$ の微分係数

を対応させる関数を $f(x)$ の導関数という.

・例 $f(x)=x^3$ の導関数は
$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\cancel{x^3}+3x^2h+3xh^2+h^3-\cancel{x^3}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left(3x^2+3xh+h^2\right) = 3x^2$$

Q $f(x)=x^{\sqrt{2}}$ $(x>0)$ の導関数を求めよ.

例 $f(x)=e^x$ の導関数は
$$\lim_{h\to0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = e^x\lim_{h\to0}\frac{e^h-1}{h}$$

ここで $\displaystyle e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ を示したのと同様の議論で
$$e^h=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h^n}{n!}=1+h+\frac{h^2}{2!}+\cdots$$ が得られる.
$$e^h-1/h=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h^{n-1}}{n!}=1+\frac{h}{2!}+\frac{h^2}{3!}+\cdots$$

よって $\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$. 以上より求める導関数は e^x

例 $f(x) = \sin x$

$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$
$= 2\cos\alpha \sin\beta$

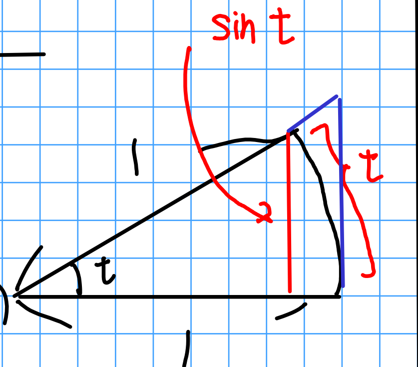
$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \cos\left(x+h/2\right) \cdot \frac{\sin\frac{h}{2}}{h/2}$$

ここで $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$

(右の図と不等式を参照のこと)



$\sin t < t < \tan t$

より

$= \cos x$

Q. $f(x) = \sin x$ で x をラジアンではなく角度で取ったならば

$$f'(x) = \frac{180}{\pi}\cos x$$

を示せ.