4/26

先週の復習.

定義 数列 a_n が α に収束する.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

とは, 任意の正数 ε に対し ある整数 $n(\varepsilon)$ があり, $n \geqq n(\varepsilon)$ をみたす全ての n に対して

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon$$

が成立することを言う.

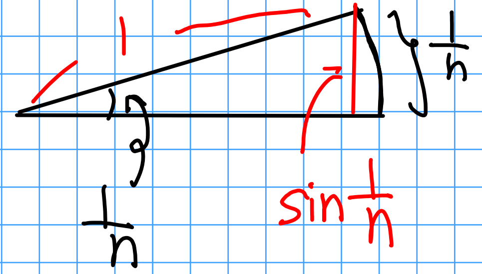
この命題について直接説明をつけるかわりに次のような問題を考える.

Q1. $a_n = \sin\frac{1}{n}$ とする $a_n < \varepsilon$

となるのは n がいくつ以上のときか?

解答例) 次の不等式を利用する.

$$0 < \sin\frac{1}{n} < \frac{1}{n}$$



$\frac{1}{n} < \varepsilon$ すなわち $n > \frac{1}{\varepsilon}$ であるとき,

$$0 < \sin\frac{1}{n} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

よって n は $\frac{1}{\varepsilon}$ より大きければよい.

Q2. $a_n = \frac{n^2}{2^n}$ とする. $a_n < \varepsilon$

となるのは n がいくつ以上のときか?

解答例). 2項定理

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k 1^k 1^{n-k}$$

$$= 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} +$$

を使うと,

$$a_n < \frac{n^2}{1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}}$$

$$< \frac{n^2}{\frac{(n-2)^3}{6}} = \frac{6n^2}{(n-2)^3}$$

$\frac{6n^2}{(n-2)^3} < \varepsilon$ となる n を求めたい。

$$\frac{6n^2}{(n-2)^3} = \frac{6}{n-2} \cdot \left(\frac{n}{n-2}\right)^2$$

$$\frac{n}{n-2} < 2 \quad (n \geqq 4)$$

より $n \geqq 4$ では

$$\frac{6}{n-2}\left(\frac{n}{n-2}\right)^2 < \frac{24}{n-2}$$

$\frac{24}{n-2} < \varepsilon$ となるような n として、

$$24 < \varepsilon(n-2)$$

$$24 + 2\varepsilon < \varepsilon n \Rightarrow \frac{24}{\varepsilon} + 2 < n$$

となる n を取ればよい。このとき、

$$a_n < \frac{6n^2}{(n-2)^3} < \frac{24}{n-2} < \varepsilon$$

求めたかった不等式

よって $n > \frac{24}{\varepsilon} + 2$ となるものを取ればよい。

※ いずれのQの解答例でも、かなりおおざっぱな不等式の計算をしている。これはQでは $a_n < \varepsilon$ となる n を 1つとにかく見つければ良い。からである。得られた n が最小のもの、すなわち $m < n$ ならば $a_m > \varepsilon$ となる必要はない。

ここで収束の定義の解説に戻る。定義中で $n(\varepsilon)$ と書いているのは ε の関数。a_n から定まるある関数 $n(\varepsilon)$ があり、それより大きい n に対しては a_n は α との差が ε より小さくなる。高校での収束の定義は、

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \alpha$ とは n が十分大きいとき a_n は α に限りなく近づく

※ 5/10 ～ Taylor展開

ここから中間試験の大部分です。

これを理解するのに「実数の定義」の知識は不用。

定義 2つの実数 $\langle A, A' \rangle$, $\langle B, B' \rangle$ の積は次のようにして定義される。

$\langle A, A' \rangle$ に収束する有理数の数列 a_n

$\langle B, B' \rangle$ 〃 b_n

を取ると 数列 $a_n b_n$ は収束し、その値を実数の積として定める。

上の定義はこのままでは well-defind ではない

すなわち定義になっていない。何故なら

① どんな a_n, b_n を取っても同じ値に収束するのか？

② そもそもどんな a_n, b_n を取ってもちゃんとある値に収束するのか？

これらの疑問に答えるためには 2つの命題が必要である。

命題1. 数列 a_n が $\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha$ となる必要十分条件は 正数 ε に対して $|a_n - \alpha| > \varepsilon$ となる n が有限個しかない。

命題2. 数列 a_n が収束する必要十分条件は 正数 ε に対し、ある $n(\varepsilon)$ があり

$m, n > n(\varepsilon)$ ならば

$$|a_m - a_n| < \varepsilon$$

①, ② の疑問に答えるために 命題2を

命題2を証明するために、先週の実数の連続性と 命題1 を使う

命題2 ⇒ 疑問②

正数 ε に対し、$n(\varepsilon)$ があり、$m, n > n(\varepsilon)$ に対して、

$$|a_m b_m - a_n b_n| < \varepsilon$$

となることを示せばよい。

$|a_m b_m - a_n b_n|$

$= |a_m b_m - a_n b_m + a_n b_m - a_n b_n|$

$\leqq |a_m b_m - a_n b_m| + |a_n b_m - a_n b_n|$

$= |b_m||a_m - a_n| + |a_n||b_m - b_n|$

a_n, b_n は $\langle A, A' \rangle, \langle B, B' \rangle$ に収束するので、ある自然数 M, N があり、全ての n に対して

$|a_n| < M \quad |b_n| < N$

~~収束の定義から~~ 命題2から ある $n(\frac{\varepsilon}{2N}), n(\frac{\varepsilon}{2M})$ があり m, n がその双方よりも大きければ

$|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2N} \quad |b_m - b_n| < \frac{\varepsilon}{\cancel{2N}}$ $2M$

となる。 を上の式に代入すると

$< N \cdot \frac{\varepsilon}{2N} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$

続いて疑問1に関しては

$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha, \quad \lim_{n\to\infty} a_n' b_n' = \beta$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n' = \langle A, A' \rangle$

$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} b_n' = \langle B, B' \rangle$ とおく。

$|a_n b_n - a_n' b_n'|$ 左と同じ式変形

$< |b_n||a_n - a_n'| + |a_n'||b_n - b_n'|$

$< |b_n| \{ |a_n - \langle A, A' \rangle| + |\langle A, A' \rangle - a_n'| \}$

$+ |a_n'| \{ |b_n - \langle B, B' \rangle| + |\langle B, B' \rangle - b_n'| \}$

収束の定義から ある $n(\frac{\varepsilon}{4N})$ $n(\frac{\varepsilon}{4M})$ があり

$|a_n - \langle A, A' \rangle| < \frac{\varepsilon}{4N}$

$|a_n' - \langle A, A' \rangle| < \frac{\varepsilon}{4N}$

b_n, b_n' に対しても同様の不等式を得ることができ、これらを利用して左と同じようにすると ε より小さいことが示せる。