講義ノート等は

http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~matusita/lecture/2010/analysis_1/index.html

今日の話題

- 開平計算 … 実数になじもう.
- 実数の和，いくつかの性質
- 収束について

4	$\sqrt{17} = 4.1231\cdots$
4	16
81	100
1	81
822	1900
2	1644
8243	25600
3	24729
82461	87100
1	82461
82462	4639

・実数の和.

定義　実数 $\mathbb{R}$ とは有理数を以下の3つの条件をみたすように2つにわけるわけ方のことである.

(1) $\mathbb{Q} = A \cup A'$, $A \neq \phi$, $A' \neq \phi$, $A \cap A' = \phi$

(2) $a \in A$　$a' \in A'$ ならば $a < a'$

(3) A に最大値はない.

※ 新しい概念を導入したときは元のものとの整合性を確認する必要がある.

上の考え方に従うと，これまでになじんできた数である有理数は上の定義とどのような関係があるか，見る必要がある.

有理数 p/q に対し,

$$A = \{ a \in \mathbb{Q} \mid a < p/q \}$$
$$= \{ p/q \text{ より小さい有理数} \}$$
$$A' = \{ a' \in \mathbb{Q} \mid a \geqq p/q \}$$
$$= \{ p/q \text{ 以上の有理数} \}$$

記法

$\mathbb{Q}$ の部分集合 S, T に対して,

$$S + T = \{ s+t \mid s \in S \quad t \in T \}$$

例 $S = \{ 3 \text{ 以下の有理数} \}$

$T = \{ 5$ 〃 $\}$

$S+T = \{ 8 \text{ 以下の有理数} \}$

定義 2つの実数 $\langle A, A' \rangle$ および $\langle B, B' \rangle$ の和を $\langle A+B, A'+B' \rangle$ と定義する.

例とその上の説明から, これは有理数の和の拡張になっていることがわかる.

つづいて 実数の積, 商を定義したいが,

そのためにはいくつか準備が必要となる.

- 有理数の稠密性
- 実数の連続性
  = 実数を大小関係で並べたとき,
  "すきま" はない.

補題 2つの実数 $\langle A, A' \rangle$ $\langle B, B' \rangle$ で $\langle A, A' \rangle < \langle B, B' \rangle$ であるような

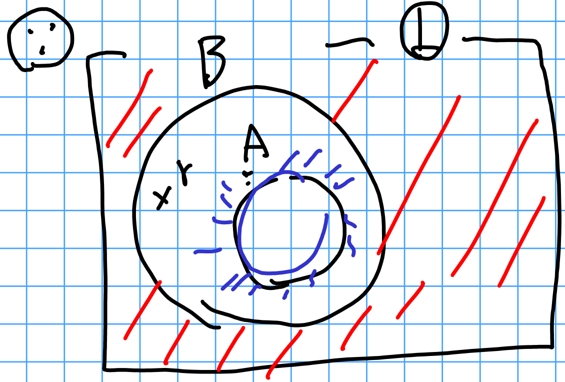
($= A \subsetneq B$ $A \neq B$ かつ A は B を含む)

ものに対し, ある有理数 r があり,

$$\langle A, A' \rangle < r < \langle B, B' \rangle$$

となる.

∵



$\mathbb{Q} = A \cup A'$

$= B \cup B'$

$A \subsetneq B$ より

$A' \supsetneq B'$

r として $r \in A'$ $r \in B$ を取る.

$C = \{ r$ より小さい有理数 $\}$

$C' = \{$ 以上 〃 $\}$ とおく.

実数の定義では $a \in A,\ a' \in A' \Rightarrow a < a'$

よって $a \in A \Rightarrow a < r$

つまり $A \subsetneq C \Rightarrow \langle A, A' \rangle < \underbrace{\langle C, C' \rangle}_{= r}$

次に C と B を比較する.

実数の定義より Bの最大値はない.

有理数 $r' \in B$ で $r < r'$ を取る.

$D = \{ r'$ よりも小さい有理数 $\}$

すると Dの全ての元は B' には入らない.

つまり, $D \subset B$. 又 $C \subsetneq D$

あわせて $C \subsetneq B$.

以上より $\langle A, A' \rangle < r < \langle B, B' \rangle$.

定理

実数の集合 $\mathbb{R}$ を次のように2つにわける.

(1) $\mathbb{R} = X \cup X'$ $X \neq \phi$ $X' \neq \phi$ $X \cap X' = \phi$

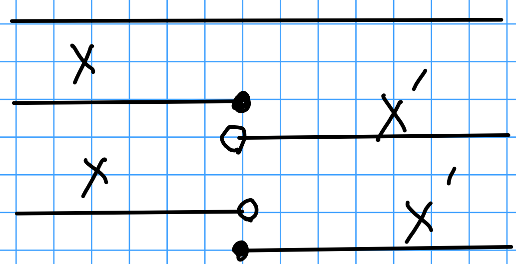
(2) $\langle A, A' \rangle \in X$ $\langle B, B' \rangle \in X'$ に対し

$\langle A, A' \rangle < \langle B, B' \rangle$

このとき X に最大値が存在するか,

X' に最小値が存在する.

※ 直観的には



数直線を2つに分断

㋡ まず2つの集合を定義する

$Y = X \cap \mathbb{Q}$ $Y' = X' \cap \mathbb{Q}$

Yに最大値がある場合，ない場合をわけて考える.

1) Yに最大値があるとき，これを r とおく. このとき r は X の最大値でもある.

何故なら r が X の最大値でなければ

$r < \langle B, B' \rangle$

先の補題より $r' \in \mathbb{Q}$ s.t. $r < r' < \langle B, B' \rangle$

これは r が Y の最大値であることに矛盾.

⇒ このときは X が最大値をもつ.

2) Yに最大値がないとき.

⇒ $\langle Y, Y' \rangle$ は実数を定める.

この $\langle Y, Y' \rangle$ が X の最大 or X′ の最小

であることを示す.

$\langle Y, Y' \rangle \in X$ とする. このとき $\langle A, A' \rangle$ は X の最大値であることを背理法を用いて示す.

$\langle Y, Y' \rangle$ が X の最大値でないとすると，ある実数 $\langle B, B' \rangle \in X$ があるが，先の補題よりある有理数 r があり

$\langle Y, Y' \rangle < r < \langle B, B' \rangle$

$r \in Y$ とすると $\langle Y, Y' \rangle < r$ に矛盾. よって $r \in Y'$. 一方 $r \in X$ より $r \in Y$ でなければならなず矛盾. 以上から $\langle Y, Y' \rangle$ が X の最大値であることがわかった.

次に $\langle Y, Y' \rangle \in X'$ とする. このとき $\langle Y, Y' \rangle$ が X′ の最小値でないとすると $\langle C, C' \rangle \in X'$ および有理数 r′ で

$\langle C, C' \rangle < r' < \langle Y, Y' \rangle$

となるものが存在する. $r' \in Y'$ とすると $r < \langle Y, Y' \rangle$ に矛盾するので $r' \in Y$. 一方 $r' \in X'$ より $r' \in Y'$ となり矛盾. 以上より $\langle Y, Y' \rangle$ は X′ の最小値となる.

・収束について.

定義 数列 a_n が $n\to\infty$ で α に収束するとは 任意の正数 ε に対し
ある ε によって定まる自然数 $n(\varepsilon)$ があり,

$n \geq n(\varepsilon)$ ならば $|a_n-\alpha| < \varepsilon$.

がなりたつ, ときを言う.

高校までは

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

〜 ⇔ n を かぎりなく大きく すれば 〜

ε の関数 $n(\varepsilon)$ よりも大きくすれば 近づくよ!

a_n は α に かぎりなく近づく.

α から ε の距離 ($|a_n-\alpha|<\varepsilon$)

には いつ 近づくの?