・何のために数学を学ぶのか？

Q1. 循環小数は有理数（分数）を表すことを示せ.

Q2. 有理数 p/q を小数に展開したとき, その循環節の長さは q をこえないことを示せ.

5/31 中間試験

7/? 期末

成績は試験のみ

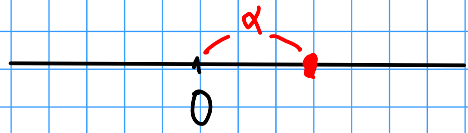
4/12 ～ 5/31

前半 1変数の微分

後半 多変数の微分

http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~matusita/lecture/2010/analysis_1/index.html
matusita@math.sci.hokudai.ac.jp

・実数



数直線と実数の間に1対1対応がある？

？の所を明確化するためには, 記号と式"だけ"を使って定義するのが良い.

$1, 2, 3, \dots$

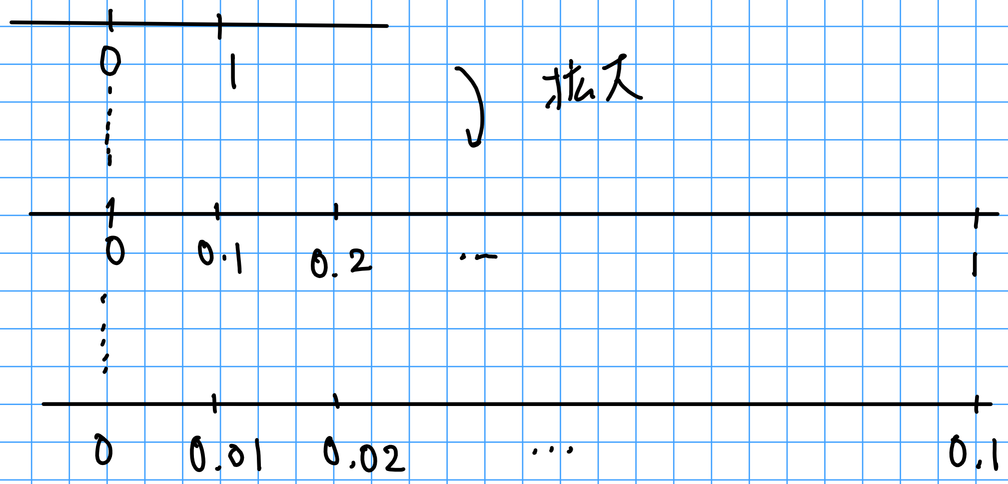
$2/3,\ 4/5, \dots$

$\mathbb{Q} = \{$有理数の集合$\}$

$\mathbb{Q}$ を上の数直線の上に"目盛った"とする. すると この目盛りは"すきま"がある

例 $\sqrt{2}$ などの無理数

この"すきま"に関して考えてみよう。



例えば

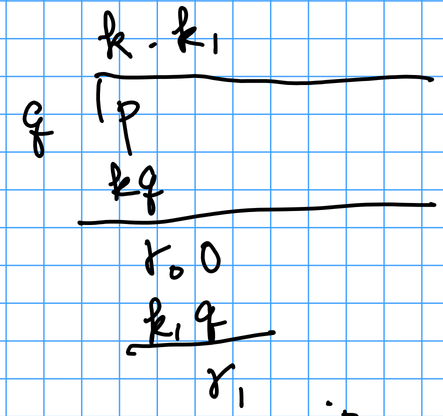
$0.11 = \frac{11}{100}$ は上のようにまず 0~1 を 10分割，次に 0~0.1 をさらに10分割した点と対応する。

有理数をこの目盛りのついた数直線の点と同一視するときは，小数展開して目盛りと対応させる。

ここで1つ有理数についての性質を見る。

補題　有理数 p/q は小数展開すると有限小数か循環小数となる。

∵ いつもやっている割り算の計算を見直してみる。



これを式を使って書くと

$p/q = k.k_1k_2k_3 \cdots\cdots k_n$

$p = kq + r_0$

$10r_0 = k_1 q + r_1$

$\vdots$

$10 r_{\cancel{n}\, n-1} = k_n q + r_{n \cancel{+1}}$

補題が主張することは

ある n があり，$m \geqq n \quad k_m = 0$

or ある l があり　$k_n = k_{n+l}$

さて、数列 $r_0\ r_1\ r_2 \cdots$ を考える。

r_i は q での除算の余りなので全ての n に対し $0 \leqq r_n < q$

よって $\underbrace{r_0 \cdots r_{q+1}}_{q+2\text{つ}}$ に必ず同じ値を取る $r_i,\ r_j$ がある。

$r_0 \cdots r_q$ の $q+1$ つを取るだけで同じ結論が出ます。

Case 1. $r_i = r_j = 0$

$0 = 10 r_i = k_i q + r_{i+1}$

$0 \leqq k_i,\ 0 \leqq r_{i+1}\ 0<q$ より

$k_i = r_{i+1} = 0.$

ここまでの議論で

$r_i = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_{i+1} = 0 \\ k_i = 0 \end{cases}$ が出た。

Case 2. $r_i = r_j \neq 0$

$10 r_i = k_i q + r_{i+1}$

$10 r_j = k_j q + r_{j+1}$

同じ

$\Rightarrow k_i = k_j \quad r_{i+1} = r_{j+1}$

ここまでの論論で

$r_i = r_j \Rightarrow \begin{cases} k_i = k_j \\ r_{i+1} = r_{j+1} \end{cases}$ が出た。

後は帰納的に結論が出る。

これから数直線上に目盛られた $\mathbb{Q}$ は目盛りが循環する点の上だけにあることがわかった。では循環しない"点"は？

定義「有理数の切断」とは、

$\mathbb{Q} = A \cup A' \quad A \cap A' = \phi$

$A \neq \phi \quad A' \neq \phi$

と $\mathbb{Q}$ を2つの部分集合 $A,\ A'$ に分割すること

ただし、

(1) A に属する元に最大値はない

(2) $a \in A,\ a' \in A' \Rightarrow a < a'$

Ex. 1) $A = \{ a \in \mathbb{Q} \mid a < p/q \}$

$A' = \{ a \in \mathbb{Q} \mid a \geq p/q \}$

2) $A = \{ a \in \mathbb{Q} \mid a < \sqrt{2} \}$

$A' = \{ a \in \mathbb{Q} \mid a > \sqrt{2} \}$

定義　実数の集合 $\mathbb{R}$ とは 有理数の切断全体の集合 のことである。

定義　$\langle A, A' \rangle$，$\langle B, B' \rangle$ に対し

$\langle A, A' \rangle = \langle B, B' \rangle \iff A = B$

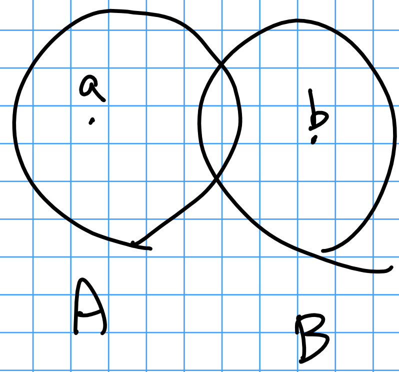
$\langle A, A' \rangle < \langle B, B' \rangle \iff A \subsetneqq B$

命題　$\langle A, A' \rangle$，$\langle B, B' \rangle$ に対し

$$\langle A, A' \rangle \begin{cases} < \langle B, B' \rangle \\ = \langle B, B' \rangle \\ > \langle B, B' \rangle \end{cases}$$

のいずれかが成立する。

(∵)　$A = B$ or $A \subsetneqq B$ or $A \supsetneqq B$ の場合は何もする必要がない。



⇐ このように $A \neq B$ だが包含関係がない場合が問題。

背理法で示す。

$a \in A$,　$b \in B$

$b \notin A$　$a \notin B$　となる元を取る。

定義から　$b \in A'$，$a \in B'$　となる。

再び定義から　$a < b$，$b < a$ ← 矛盾。