7/21

問1.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 1\cdot 0\cdot 4 + (-1)\cdot 2\cdot(-5) + 3\cdot 2\cdot 1 - 3\cdot 0\cdot(-5) - 1\cdot 2\cdot 1 - 2\cdot(-1)\cdot 4$$

$$= 10 + 6 - 2 + 8 = 22$$

他にも

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= -\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & 7 \end{pmatrix} = -(-1)\det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= 14 + 8 = 22.$$

問2.

まず $n = 2, 3$ の場合を考えてみる.

$n = 2$ $\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} = x_1^2 - x_2^2$

$$= (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$$

$n = 3$

$$\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}$$

$$= 3x_1x_2x_3 - x_1^3 - x_2^3 - x_3^3$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)\{-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1\}$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)\{-x_1^2 + (x_2 + x_3)x_1 - x_2^2 - x_3^2 + x_2x_3\}$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)\{-x_1^2 + (x_2 + x_3)x_1$$

$$- (x_2 + \cancel{\delta_6}\,\omega\, x_3)(x_2 \cancel{- \bar{\delta}_6} + \bar{\omega}\, x_3)$$

$\cancel{\delta_6}\ \omega$ は $\cancel{\delta^6}\ \omega^3 = 1$ になる数

$$\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)$$

$$\times (x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3)$$

一般の n の場合.

$$X=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_1 \\ & & & \\ x_n & x_1 & & x_{n-1} \end{pmatrix}$$ の j 列に $\zeta^{i(j-1)}$

を掛けて足しあわせると　(ζ は $\zeta^n=1$)

$$\begin{pmatrix} x_1+\zeta^i x_2+\zeta^{2i}x_3+\cdots+\zeta^{i(n-1)}x_n \\ x_2+\zeta^i x_3+\zeta^{2i}x_4+\cdots+\zeta^{i(n-1)}x_1 \\ \vdots \\ x_n+\zeta^i x_1+\zeta^{2i}x_2+\cdots+\zeta^{i(n-1)}x_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$=(x_1+\zeta^i x_2+\cdots+\zeta^{i(n-1)}x_n)\begin{pmatrix} 1 \\ \zeta^{i} \\ \vdots \\ \zeta^{(n-1)i} \end{pmatrix}$$

この式から、次の等式を得る.

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_1 \\ & & & \\ x_n & x_1 & \cdots & x_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \zeta & & \zeta^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \zeta^{n-1} & & \zeta^{(n-1)^2} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \zeta & & \zeta^{n-1} \\ \vdots & & & \\ 1 & \zeta^{n-1} & & \zeta^{(n-1)^2} \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} \ddots & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}}_{\text{対角行列}}$$

(i,i) 成分は $x_1+\zeta^i x_2+\cdots+\zeta^{i(n-1)}x_n$

よって

$$\det X\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \zeta & & \zeta^{(n-1)} \\ \vdots & & & \\ 1 & \zeta^{(n-1)} & & \zeta^{(n-1)^2} \end{pmatrix}$$

$$=\det\begin{pmatrix} & '' & \end{pmatrix}\prod_{i=0}^{n-1}(\text{上の式})$$

$$\det X=\prod_{i=0}^{n-1}(x_1+\zeta^i x_2+\cdots+\zeta^{(n-1)}x_n)$$

例題　A, B が $n\times n$ 行列である.

このとき,　$\det\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$ を求めよ.

解

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A+B & B+A \\ B & A \end{pmatrix}$$
$$= \det\begin{pmatrix} A+B & O \\ B & A-B \end{pmatrix}$$
$$= \det(A+B)\det(A-B) \,/\!/$$

例題

$\det\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ を求めよ.

$$\det\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A+iB & -B+iA \\ B & A \end{pmatrix}$$
$$= \det\begin{pmatrix} A+iB & O \\ B & A-iB \end{pmatrix}$$
$$= \det(A+iB)\det(A-iB)$$

問3.

Aの余因子行列

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \det A_{11} & -\det A_{21} & \cdots & (-1)^{n-1}\det A_{n1} \\ -\det A_{12} & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ (-1)^{n-1}\det A_{1n} & & \cdots & \det A_{nn} \end{pmatrix}$$

$\tilde{A}$ の(i,j)成分 $= (-1)^{i+j}\det A_{ji}$

とおくと

$$A\cdot\tilde{A} = (\det A)\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

この等式をふまえて, 次の積を考える.

$$A\cdot\begin{pmatrix} \det A_{11} & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{n-1}A_{n1} \\ -\det A_{12} & 1 & & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & \\ (-1)^{n-1}\det A_{1n} & 0 & \cdots & 0 & \det A_{nn} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & & \vdots \\ \vdots & A^{1,n}_{1,n} & \\ 0 & 0 & \det A \end{pmatrix}$$

この式の行列式を取ると

$$\det A\,(\det A_{11}\det A_{nn} - \det A_{1n}\det A_{n1})$$
$$= (\det A)^2 \det A^{1,n}_{1,n}$$

となり $\det A$ で割って求める式を得る.

ルイス・キャロルの行列式の計算法

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix} = 3abc - a^3 - b^3 - c^3$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} ac-b^2 & ab-c^2 \\ ab-c^2 & bc-a^2 \end{pmatrix}$$

$$\to (ac-b^2)(bc-a^2) - (ab-c^2)(ab-c^2)$$

$$= ac^2b - a^3c - b^3c + a^2b^2$$

$$\quad - a^2b^2 + abc^2 + abc^2 - c^4$$

$$= 3abc^2 - a^3c - b^3c - c^4$$

これを c で割ると行列式が出る。

補足. 一般の場合

$A = (a_{ij})$ に対し　$A_0 = A$

$B_0 =$ 全ての成分が1の $(n-1 \times n-1)$ 行列

とおき、$A_1 \cdots A_n$　$B_1 \cdots B_{n-1}$ を次のように定める

A_k の (i,j)-成分　$(1 \leq i,j \leq n-k)$

$$= \frac{\{(A_{k-1}\text{の } i,j \text{ 成分}) \times (A_{k-1}\text{の } i+1, j+1 \text{ 成分}) - (A_{k-1}\text{の } i+1, j \text{ 成分}) \times (A_{k-1}\text{の } i, j+1 \text{ 成分})\}}{(B_{k-1}\text{の } (i,j) \text{ 成分})}$$

B_k の (i,j)-成分　$(1 \leq i,j \leq n-k-1)$

$= A_{k-1}$ の $(i+1, j+1)$ 成分

すると A_n が $\det A$ と等しくなる。