7/14

今日の話題

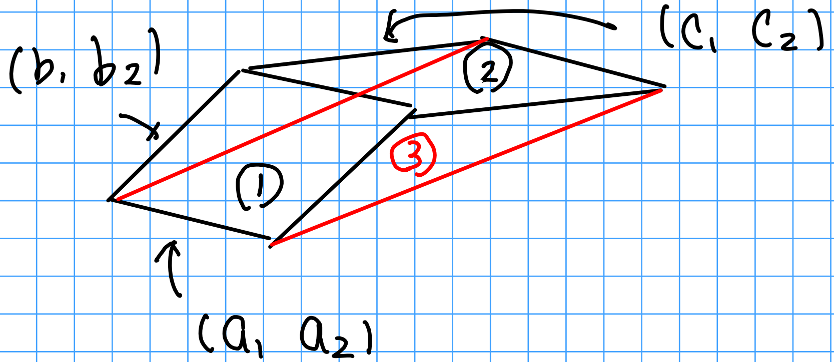
・行列式の特徴付け

・終結式.

行列式の特徴付け.

行列式の性質 (2×2)

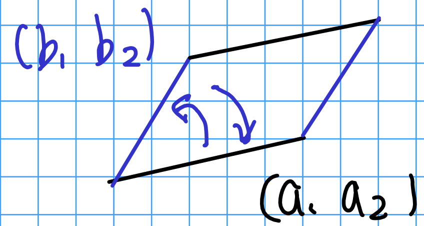
1) $\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 + c_1 \\ a_2 & b_2 + c_2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix}$



①の面積 + ②の面積 = ③の面積

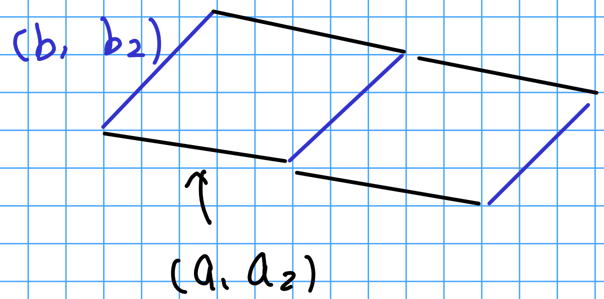
$$\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \qquad \det\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

2) $\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}$



向きによって符号が変化する.

3) $\det\begin{pmatrix} ca_1 & b_1 \\ ca_2 & b_2 \end{pmatrix} = c\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$



逆に n個のベクトルの関数 $f(a_1, \cdots a_n)$ で 1)〜3)の性質をみたすものは 行列式の定数倍したものと等しい. これを $n=3$の場合に限って説明する.

記号をまず設定する。

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\end{pmatrix} = a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + a_{31}\mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\end{pmatrix} = a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + a_{32}\mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{a}_3 = a_{13}\mathbf{e}_1 + a_{23}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3$$

とおく。すると

$$f(\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3)$$

$$= f(a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + a_{31}\mathbf{e}_3,\ \mathbf{a}_2,\ \mathbf{a}_3)$$

$$= a_{11} f(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \mathbf{a}_3) + a_{21} f(\mathbf{e}_2, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) + a_{31} f(\mathbf{e}_3,\ \mathbf{a}_2,\ \mathbf{a}_3)$$

$$= \sum_{1 \le i_1\ i_2\ i_3 \le 3} a_{i_1 1} a_{i_2 2} a_{i_3 3} f(\mathbf{e}_{i_1}\ \mathbf{e}_{i_2}\ \mathbf{e}_{i_3}) \quad \cdots (\ast)$$

性質2) より、$i_1 = i_2$ のとき、

$$f(\mathbf{e}_{i_1}\ \mathbf{e}_{i_2}\ \mathbf{e}_{i_3}) = -f(\mathbf{e}_{i_2}\ \mathbf{e}_{i_1},\ \mathbf{e}_{i_3})$$

$$\shortparallel$$

$$f(\mathbf{e}_{i_2},\ \mathbf{e}_{i_1},\ \mathbf{e}_{i_3})$$

$$\Rightarrow 2f(\mathbf{e}_{i_1}\ \mathbf{e}_{i_2}\ \mathbf{e}_{i_3}) = 0$$

$$\Rightarrow f(\mathbf{e}_{i_1},\ \mathbf{e}_{i_2},\ \mathbf{e}_{i_3}) = 0$$

つまり $f(\mathbf{e}_{i_1}\ \mathbf{e}_{i_2}\ \mathbf{e}_{i_3})$ は $i_1, i_2\ i_3$ に同じものがあると 0 となる。よって

$$(\ast) = \sum_{\substack{i_1\ i_2\ i_3 \\ \text{が相異なる}}} a_{i_1 1} a_{i_2 2} a_{i_3 3} f(\mathbf{e}_{i_1}\ \mathbf{e}_{i_2}\ \mathbf{e}_{i_3})$$

$\leftarrow (i_1\ i_2\ i_3) = (123), (231), (312)\ (132)\ (213)\ (321)$

$$= a_{11} a_{22} a_{33} f(\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3)$$
$$+ a_{21} a_{32} a_{13} f(\mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3\ \mathbf{e}_1)$$
$$+ a_{31} a_{12} a_{23} f(\mathbf{e}_3\ \mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2)$$
$$+ a_{11} a_{32} a_{23}$$
$$+ a_{21} a_{12} a_{33}$$
$$+ a_{31} a_{22} a_{11}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = A$$

$$f(e_2, e_3, e_1) = -f(e_2, e_1, e_3)$$
$$= f(e_1, e_2, e_3)$$

より

$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}$$
$$- a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{11}]$$
$$\times f(e_1, e_2, e_3)$$
$$= \det A \, f(e_1, e_2, e_3)$$

まとめると

$$f(a_1, a_2, a_3) = \det A \cdot C$$
$$C = f(e_1, e_2, e_3)$$

終結式

2つの多項式

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$$
$$g(x) = b_m x^m + \cdots + b_0$$

から次の $n+m \times n+m$ の行列を考える.

$$\left(\begin{array}{ccccccc} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & \cdot & & a_0 & 0 \cdots & 0 \\ & \vdots & & & & & \\ b_m & b_{m-1} & \cdots & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_m & \cdots & & b_0 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & b_m & b_{m-1} & \cdots & b_0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right\} m\text{行} \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right\} n\text{行} \end{array}$$

例 $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$g(x) = 2ax + b = f'(x)$$

このとき $2+1 = 3\times 3$ の行列

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & b & 0 \\ 0 & 2a & b \end{pmatrix} = M$$

定理.

$f(x) = g(x) = 0$ が解をもつ

$\Leftrightarrow \det M = 0$

上の例で検証する.

$$\det M = ab^2 + 4a^2c - 2ab^2$$
$$= 4a^2c - ab^2 = a(4ac - b^2)$$

$a \neq 0$ のとき, つまり $f(x)$ が 2次式のとき,

$$\det M = 0 \Leftrightarrow 4ac - b^2 = 0$$

定理の証明.

$f(x) = g(x) = 0$ が $x = \alpha$ を共通解に持ったとする.

$$M \begin{pmatrix} \alpha^{n+m-1} \\ \alpha^{n+m-2} \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \alpha^{n+m-1} + a_{n-1}\alpha^{n+m-2} + \cdots + a_0 \alpha^{m-1} \\ \vdots \\ b_m \alpha^m + \cdots + b_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha^{m-1} f(\alpha) \\ \vdots \\ g(\alpha) \end{pmatrix}$$

ここで $f(\alpha) = g(\alpha) = 0$ より, 上のベクトルは 0

ここで $\det M \neq 0$ とすると, M^{-1} を上の式に かければ

$$\begin{pmatrix} \alpha^{n+m-1} \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

これは矛盾. よって $\det M = 0$.

次に逆を f, g の次数が2の場合に考察する.

$$\det M = \det\begin{pmatrix} a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_1 & a_0 \\ b_2 & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix}$$

$$= a_2^2 b_2^2 \det\begin{pmatrix} 1 & \frac{a_1}{a_2} & \frac{a_0}{a_2} & 0 \\ 0 & 1 & a_1/a_2 & a_0/a_2 \\ 1 & b_1/b_2 & b_0/b_2 & 0 \\ 0 & 1 & b_1/b_2 & b_0/b_2 \end{pmatrix}$$

ここで $f(x)=0$ の解を α_1, α_2

$g(x)=0$ の解を β_1, β_2 とする.

すると $a_1/a_2 = -(\alpha_1+\alpha_2)$

$a_0/a_2 = \alpha_1\alpha_2$ となる.

これを代入して

$$= a_2^2 b_2^2 \det\begin{pmatrix} 1 & -(\alpha_1+\alpha_2) & \alpha_1\alpha_2 & 0 \\ 0 & 1 & -(\alpha_1+\alpha_2) & \alpha_1\alpha_2 \\ 1 & -(\beta_1+\beta_2) & \beta_1\beta_2 & 0 \\ 0 & 1 & -(\beta_1+\beta_2) & \beta_1\beta_2 \end{pmatrix}$$

この表示から

$$\det M = a_2^2 b_2^2 \times \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1\ \alpha_2\ \beta_1\ \beta_2 \text{ の式で} \\ \text{単項式に展開したとき,} \\ \quad \alpha_1^{a_1} \alpha_2^{a_2} \beta_1^{b_1} \beta_2^{b_2} \\ \quad a_1 + a_2 + b_1 + b_2 \leqq 4 \end{array} \right\}$$

また先程の考察から,

$\alpha_i = \beta_j$ のとき, $\det M = 0$

以上のことから

ない

$$\det M = a_2^2 b_2^2 \Big(\cancel{C_4(\alpha_2, \beta_1, \beta_2)\alpha_1^4}$$

ない

$$+ \cancel{C_3(\alpha_2, \beta_1, \beta_2)\alpha_1^3} \ 2$$

$$+ C_2(\alpha_2, \beta_1, \beta_2)\alpha_1$$

$$+ C_0(\alpha_2, \beta_1, \beta_2) \Big)$$

この α_1 に β_1 又は β_2 を代入すると0

$\Rightarrow$ $\alpha_1 - \beta_1$, $\alpha_1 - \beta_2$ で割り切れる.

よって

$\det M = a_2^2 b_2^2\, g(\alpha_2, \beta_1, \beta_2)(\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_2 - \beta_2)$

次に　$\alpha_2 = \beta_1$　$\alpha_2 = \beta_2$ のときも $\det M = 0$

つまり　$(\alpha_2 - \beta_1)(\alpha_2 - \beta_2)$ でも割り切れる.

よって

定数.

$\det M = a_2^2 b_2^2\, h(\beta_1, \beta_2)$

$\times \underbrace{(\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_1 - \beta_2)(\alpha_2 - \beta_1)(\alpha_2 - \beta_2)}_{4次式}$

$= C a_2^2 b_2^2 (\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_1 - \beta_2)(\alpha_2 - \beta_1)(\alpha_2 - \beta_2)$

C は 定数.

一般の場合

$f(x) = 0$ の解を　$\alpha_1 \cdots \alpha_n$

$g(x) = 0$ の解を　$\beta_1 \cdots \beta_m$

とおくと,

$$\det M = a_n^m b_m^n \prod_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} (\alpha_i - \beta_j)$$

となり　$\det M = 0$

$\Rightarrow \exists i, j \quad \alpha_i = \beta_j$

これは　$f(x) = g(x) = 0$ が共通解をもつこと

に他ならない.