7/7

今日の話題

・行列式の幾何的な意味

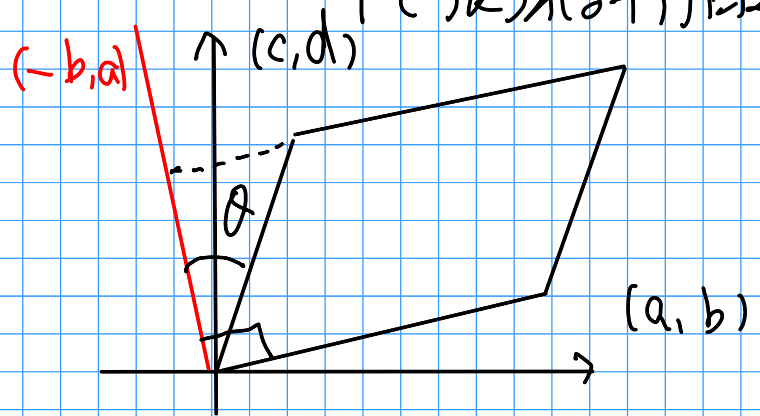
・行列式の積

・行列式の性質のまとめ

・行列式の幾何的な意味

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して

$\det A = \Big\{$ ベクトル $(a\ b)$, (c, d) で張られる平行四辺形の符号付面積 $\Big\}$



(a, b) を 90° 左まわりにまわしたものを考える.

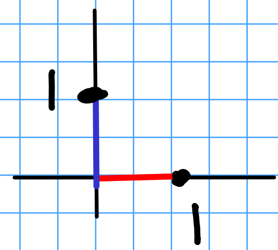
(c, d) の $(-b, a)$ へ射影したものの長さは,

$$\sqrt{c^2+d^2}\cos\theta = \frac{c\cdot(-b)+a\cdot d}{\sqrt{(-b)^2+a^2}}$$

平行四辺形の面積

$= \sqrt{a^2+b^2}\cdot$(射影の長さ) $= ad-bc$

※ 符号について



$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$$

3×3 の場合を見るために, ベクトルの"外積"を導入する必要がある.

$a = (a_1\ a_2\ a_3)$　$b = (b_1\ b_2\ b_3)$

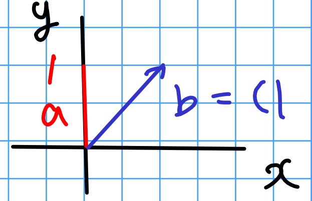
に対し ベクトル $a \times b$ を a から b に右ねじをまわした向きの長さが a, b が張る平行四辺形の面積と等しいものとする.

例 $a=(1\ 0\ 0)$　$b=(0\ 1\ 0)$

$a\times b=(0\ 0\ 1)$　$b\times a=(0\ 0\ -1)$

$a=(0\ 1\ 0)$　$b=(1\ 1\ 0)$

$a\times b=(0\ 0\ -1)$



補題 $a=(a_1\ a_2\ a_3)$　$b=(b_1\ b_2\ b_3)$ に対し

$$a\times b=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\ \begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}\ \begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)$$

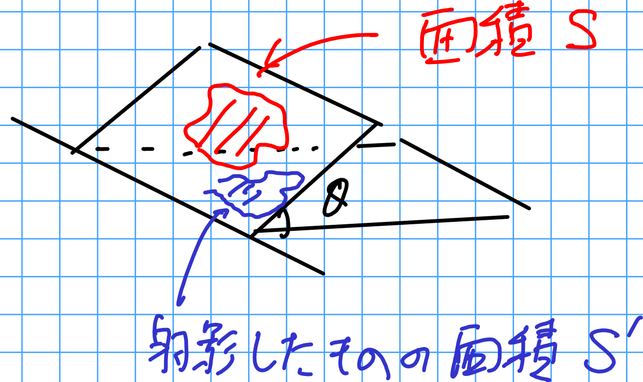
ただし $\begin{vmatrix}x & y\\ z & w\end{vmatrix}=xw-yz.$

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_1\\ & z & & x & & y & \\ b_1 & & b_2 & & b_3 & & b_1\end{array}$$

例 $a=(0\ 1\ 0)$　$b=(1\ 1\ 0)$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & & 1 & & 0 & & 0\\ & -1 & & 0 & & 0 & \\ 1 & & 1 & & 0 & & 1\end{array}\Rightarrow (0\ 0\ -1)$$

この補題を説明するために、次の事実を使う。



$S\cos\theta=S'$

さて a, b で張られた平行四辺形を xy 平面に射影したものは

$a=(a_1\ a_2\ a_3)\overset{射影}{\rightsquigarrow}(a_1\ a_2\ 0)$

$b=(b_1\ b_2\ b_3)\rightsquigarrow(b_1\ b_2\ 0)$

a b を射影したベクトルから定まる平行四辺形

a b が張る平面と xy平面が
なす角を θ とすると a b が張る平行四辺形の面積は

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \frac{1}{\cos\theta}$$

ここで θ は a b のはる平面の法線ベクトルと xy平面の法線ベクトルのなす角である.

(0 0 1)

a, b と直交するベクトル

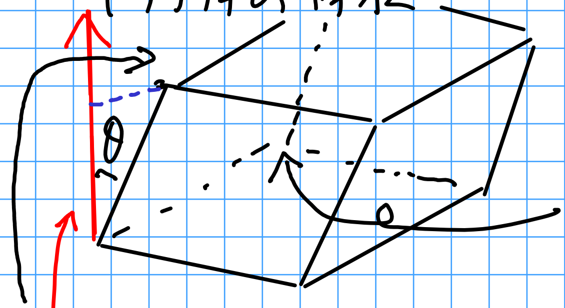
$$\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$\cos\theta = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{(\quad \text{の長さ}) \times 1}$$

これを上の面積の式に代入すれば

(のベクトルの長さ) = (a, b が張る平行四辺形の面積)

・平行体の体積



$b = (a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23})$

$a = (a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13})$

$c = (a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33})$

a×b

$$(a \times b) \cdot c$$
$$= |a \times b| \cdot \underbrace{|c| \cos\theta}_{\text{高さ}} = \text{平行体の体積}$$

(a b が張る平行四辺形の面積)

一方 $(a \times b) \cdot c$

$$= a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{32} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{13} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

・行列式の性質のまとめ（その1）

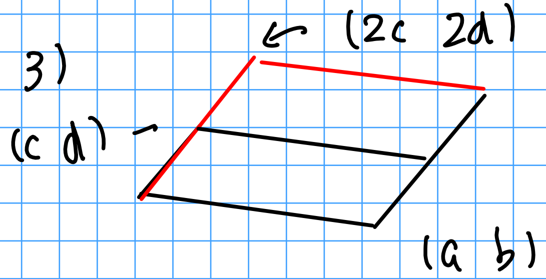
行列式は

1) 行に他の行の定数倍を足す … 不変

2) 行と行を交換する … (-1)倍

3) 行を c 倍 — c 倍

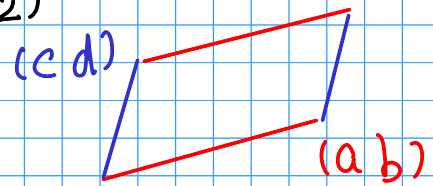
3)



平行四辺形を張る1つの辺が c 倍

⇝ 面積 c 倍

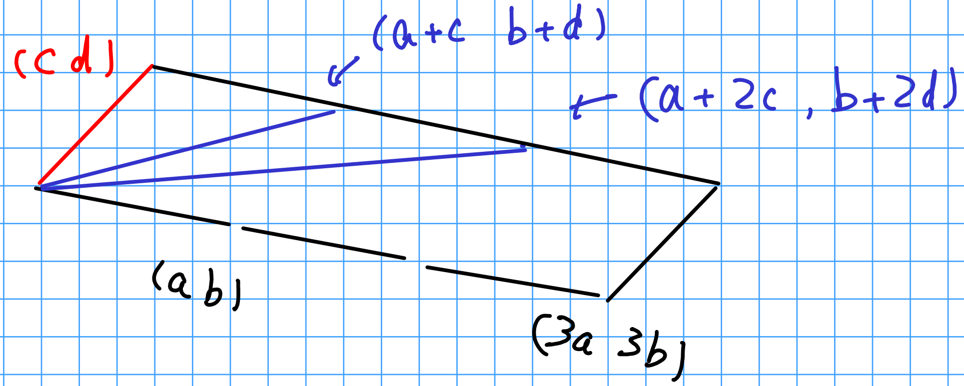
2)



行を入れかえる。

⇒ (a b)と(c d)の位置関係がかわる。

1)



(a,b) (c d)が張る面積

= (a, b) (a+c, b+d) 〃

= (a, b) (a+2c, b+2d) 〃