6/30

・今日の話題 ・余因子行列

・行列式の性質（その4）

定義　$A=(a_{ij})$ の (i,j)-余因子 とは A から i 行, j 列を取り除いた行列を A' としたとき

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}\det A'$$

例　$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\Delta_{11} = (-1)^2 \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -1$$

$$\Delta_{12} = (-1)^3 \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 5$$

$$\Delta_{13} = (-1)^4 \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = -1$$

$$\begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & \Delta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 5 & 5 & -5 \\ -1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 5 & 5 & -5 \\ -1 & -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

補題

$A=(a_{ij})$ に対し A の余因子行列を

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \Delta_{1n} & & & \Delta_{nn} \end{pmatrix}$$ と定義する。

$$A\cdot\tilde{A} = (\det A)E_n \quad (E_n \text{ 単位行列})$$

$A\cdot\tilde{A}$ の (i,j) 成分は

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\Delta_{kj}$$

従って次の式を示せばよい

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\Delta_{\cancel{kj}\,jk} = \begin{cases} \det A & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

ここで Aの行列式の計算をしてみよう.

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \det\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & & & a_{2k} & & & a_{2n} \\ a_{n1} & & & a_{nk} & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

2行より下はAと同じ

ここで

$$(※)\quad \det\begin{pmatrix} 0 & \cdots & a_{1k} & \cdots & 0 \\ a_{21} & & a_{2k} & & a_{2n} \\ a_{n1} & & a_{nk} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{k-1}\det\begin{pmatrix} a_{1k} & 0 & 0 & & 0 \\ a_{2k} & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nk} & a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{k-1} a_{1k} \det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

となる.(2つ目の $=$ は後で説明する.)

余因子の定義より

$$= (-1)^{k-1} a_{1k} (-1)^{k+1} \Delta_{1k}$$

$$= a_{1k}\Delta_{1k}$$

まとめて $\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}\Delta_{1k}$

次に

$$0 = \det\begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

1行 $=$ i行

$$= \sum_{k=1}^{n} \det\begin{pmatrix} 0 & \cdots & a_{ik} & & 0 \\ a_{21} & & a_{2k} & & a_{2n} \\ & & \vdots & & \\ a_{n1} & & a_{nk} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \det\begin{pmatrix} a_{ik} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2k} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ a_{nk} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\Delta_{1k}$$

= を説明する前に、次の計算を見る。

例題

$$\det\begin{pmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$ を求めよ。

解) (上式) $= \det\begin{pmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ 0 & a_2+\frac{a_3}{x} & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$

$$= x\cdot\det\begin{pmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ a_2+\frac{a_3}{x} & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

$$= x\cdot\det\begin{pmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ 0 & a_1+\frac{a_2}{x}+\frac{a_3}{x^2} & a_0 \end{pmatrix}$$

$$= x\cdot x\cdot\det\begin{pmatrix} x & -1 \\ a_1+\frac{a_2}{x}+\frac{a_3}{x^2} & a_0 \end{pmatrix}$$

$$= a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$$

一般に

$$\det\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix} = \det A_{11}\det A_{22}$$

$$\det\begin{pmatrix} A_{11} & O \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \det A_{11}\cdot\det A_{22}$$

(A_{11} A_{12} A_{21}, A_{22} は行列)

今日は特に

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & \overset{O}{\cancel{A_{12}}} \\ \underset{A_{21}}{\cancel{0}} & A_{11} \end{pmatrix} = a_{11}\det A_{11}$$

のみ示す。

$S_n = \{\ 1\sim n$ の間の $1:1$ 対応 $\}$

$\cup$

$S_{n-1} = \{\ 2\sim n$ 〃 $\}$ 1は1にうつる。

を念頭において考える。

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}\sigma\, a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}$$

上の和で $\sigma(1)\neq 1$ の項は全て0

$$= \sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}\sigma\, a_{11}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$= a_{11} \sum_{\sigma \in S_{n-1}} \mathrm{sgn}\,\sigma \; a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$= a_{11} \det A_{11}$$

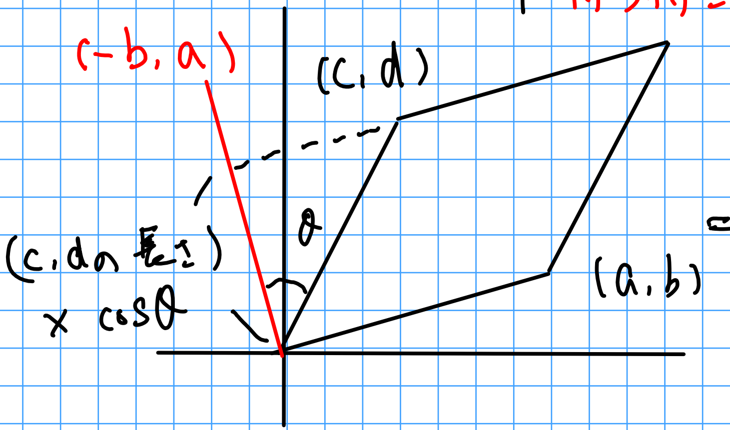
行列式の性質(その4)

行列 A, B に対して

$$\det AB = \det A \cdot \det B.$$

幾何的な話

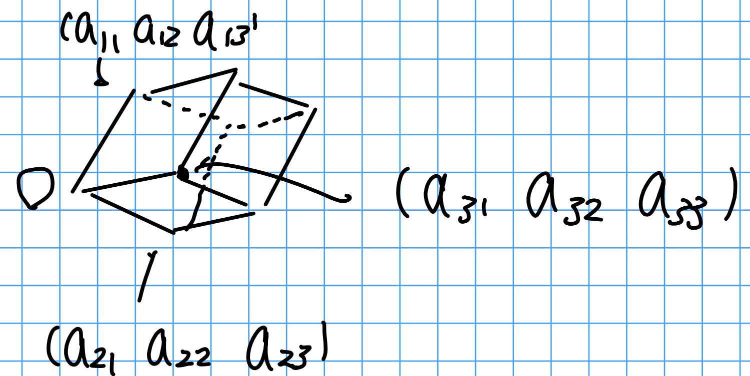
$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{ベクトル } (a\ b),\ (c\ d) \\ \text{で張られる平行四辺形の} \\ \text{符号付き面積} \end{array} \right\}$$



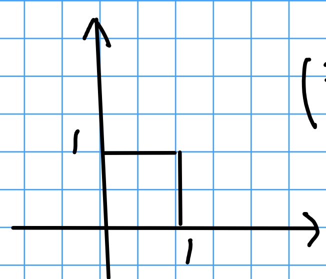
$$ad - bc = \left\{ \begin{array}{l} (a, b)\text{の長さ} \\ \times\ (c, d)\text{の長さ} \\ \times\ \cos\theta \end{array} \right\}$$

同様に

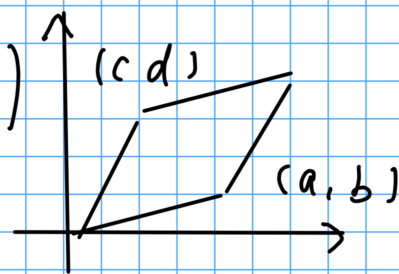
$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} (a_{11}\ a_{12}\ a_{13}) \\ (a_{21}\ a_{22}\ a_{23}) \\ (a_{31}\ a_{32}\ a_{33}) \end{array} \right. \text{で張られるひしゃげた6面体の符号付き体積} \Big\}$$



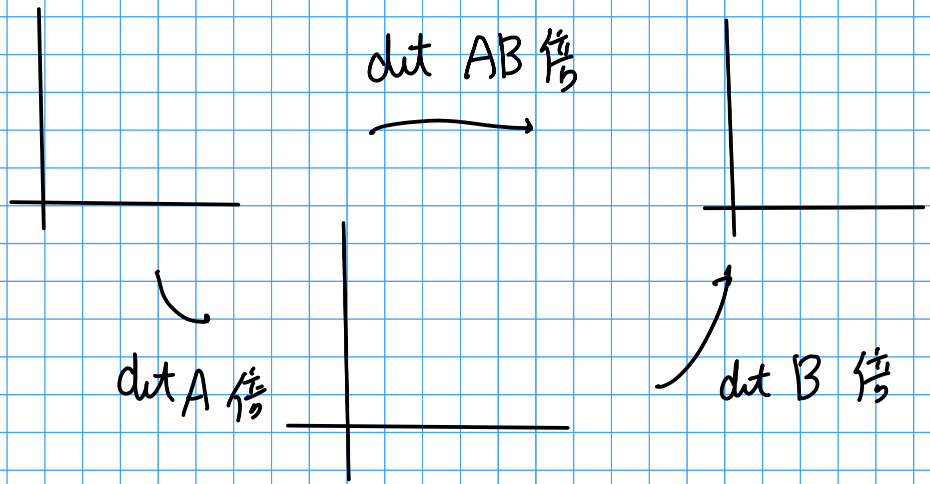
さて、A による1次変換を考える。



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$



面積は $\det A$ 倍される。



この性質を利用すれば

例題　A を直交行列 すなわち

${}^tAA = E$ となる行列とする. Aの行列式が ±1 となることを示せ.

解). 行列式の定義から　$\det {}^tA = \det A$.

よって　$\det {}^tAA = \det {}^tA \det A$

$$= (\det A)^2$$

一方　$\det ({}^tAA) = \det E = 1$.

よって　$\det A = \pm 1$.