6/23.

今日の話題

- 行列式の計算 (その4)
- 余因子行列.

先週の復習.

	行列式
行列の行を交換すると	−1 倍
〃 c倍すると	c倍
〃 に他の行を加えると	変わらない

これから

同じ行をもつ行列の行列式は 0.

実際 $A=(a_{ij})$ で k, l 行が等しいものを取れば

$$A' = (A\text{の } k, l \text{ 行を入れかえたもの}) = A$$

一方 $\det A' = -\det A$

よって $\det A = -\det A$

$2\det A = 0$ $\det A = 0$.

これを用いると次の行列の行列式が計算できる.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

行列式を考える前に次のことを確認しておく.

"定義"

行列 A の行列式とは

各行各列から1つずつ成分をえらび,

それをかけあわせ適当に ±1 倍して足したものである.

上の"定義"からすると, 求める行列式は $x_1, \cdots x_n$ の多項式であり, 各文字についての次数は $n-1$

以後, この行列式を $f_n(x_1, \cdots x_n)$ で表す.

さて、この行列で x_1 のみを変数、それ以外のものを定数と思うことにする。すると、

$x_1 = x_2, \cdots, x_n$ のとき、

この行列は同じ行を2つもつ。従って

このとき行列式は0。いいかえると

$f_n(x_1, \cdots x_n)$ の x_1 に $x_2 \cdots x_n$

を代入すると0となる よって

$$f_n(x_1 \cdots x_n) = a_{n-1}(x_2 \cdots x_n)x_1^{n-1} + a_{n-2}(x_2 \cdots x_n)x_1^{n-2} + \cdots + a_0(x_2 \cdots x_n)$$

は $\underbrace{x_1 - x_2, \cdots, x_1 - x_n}_{n-1\text{こ の 式}}$ で割り切れる。

$$f_n(x_1, \cdots, x_n) = f_{n-1}(x_2 \cdots x_n)(x_1 - x_2) \cdots (x_1 - x_n)$$

ここで $f_{n-1}(x_2 \cdots x_n)$ は $x_2 \cdots x_n$ の $n-2$ 次式。

次に x_2 を変数、残りを定数と見る。すると、 $x_2 = x_3 \cdots x_n$ のとき、

やはり元の行列は同じ行をもつ。

これは $f_{n-1}(x_2 \cdots x_n)$ が

$x_2 - x_3 \cdots x_2 - x_n$ の $n-2$ この式で

割り切れることを意味する。

$$f_{n-1}(x_2 \cdots x_n) = f_{n-2}(x_3 \cdots x_n)(x_2 - x_3) \cdots (x_2 - x_n)$$

$f_{n-2}(x_3 \cdots x_n)$ は $x_3 \cdots x_n$ の $n-3$ 次式

これをくり返して

$$\begin{aligned} f_n(x_1 \cdots x_n) &= (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \cdots (x_1 - x_n) \\ &\times (x_2 - x_3)(x_2 - x_4) \cdots (x_2 - x_n) \\ &\times \\ &\times (x_{n-1} - x_n) \cdot f_1(x_n) \end{aligned}$$

定数

以上から

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= C(x_1-x_2)\cdots(x_{n-1}-x_n)$$

定数

ここで C を求めるために、

$x_2 x_3^2 x_4^3 \cdots x_n^{n-1}$

の項の係数を両辺で比較すると、

左辺 $=1$. 右辺 $= C\cdot(-1)^{n(n-1)/2}$

$$C = (-1)^{n(n-1)/2}$$

つまり

$$\det\left(\quad\right) = (-1)^{n(n-1)/2} \times (x_1-x_2)\cdots(x_{n-1}-x_n)$$

問1 訂正

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{pmatrix}$$

・余因子行列

$A=(a_{ij})$ の (i,j)-余因子とは

$$(-1)^{\boxed{i+j}}\det\left(A \text{ から } i \text{ 行 } j \text{ 列を除いたもの}\right)$$

命題.

$A=(a_{ij})$ が $\det A\neq 0$ だとする.

このとき

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & & \Delta_{nn} \end{pmatrix}$$

ただし Δ_{ij} は A の (i,j) 余因子.

例 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき,

$\Delta_{11}=d$ $\Delta_{12}=-c$ $\Delta_{21}=-b$ $\Delta_{22}=a$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

この命題を示すために，行列式の計算について又考える．先週，次のようなことを考えた

行列の行に 他の行のc倍を加える．

⇝ 行列式には変化なし．

これの説明で

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{k1}+ca_{l1} & \cdots & a_{kn}+ca_{ln} \\ a_{n1} & & a_{nn}\end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{k1} & a_{kn} \\ a_{n1} & a_{nn}\end{pmatrix} + c\det\begin{array}{c}\\ k\text{行}\rightarrow\\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{l1} & a_{ln} \\ a_{l1} & a_{ln} \\ a_{n1} & a_{nn}\end{pmatrix}$$

この等式をふまえると，次の等式が成立することがわかる．

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}+0 & 0+a_{12} & & 0+a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn}\end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn}\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn}\end{pmatrix}$$

$$= \det(\quad)_{\text{同じ}} + \det\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \cdots & 0 \\ a_{n1} & & & a_{nn}\end{pmatrix}$$

$$+ \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n1} & & & & & a_{nn}\end{pmatrix} \cdots + \det\begin{pmatrix} 0 \cdots & 0 & a_{1n} \\ a_{n1} & & a_{nn}\end{pmatrix}$$

補題

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn}\end{pmatrix} = a_{11}\Delta_{11}$$

系

$$\det\begin{pmatrix} 0 & \cdots & a_{1i} & \cdots & 0 \\ a_{21} & & & & a_{2n} \\ a_{n1} & & & & a_{nn}\end{pmatrix} = a_{1i}\Delta_{1i}$$

補題と系より

$$a_{11}\Delta_{11}+a_{12}\Delta_{12}+\cdots+a_{1n}\Delta_{1n}$$

$$=\det A.$$

同様の議論で

・ $a_{k1}\Delta_{k1}+\cdots+a_{kn}\Delta_{kn}=\det A$

・ $a_{k1}\Delta_{l1}+\cdots+a_{kn}\Delta_{ln}=0$
$(k\neq l)$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \det A & & & O \\ & \det A & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \det A \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}+0 & 0+a_{12} & & 0+a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$=\det\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$=\det\left(\quad\right)^{\nearrow \text{同じ}}+\det\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \\ a_{n1} & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$+\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & & \\ a_{n1} & & & & & a_{nn} \end{pmatrix}\cdots+\det\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ & & & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

補題

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix}=a_{11}\Delta_{11}$$

系

$$\det\begin{pmatrix} 0 & \cdots & a_{1i} & \cdots & 0 \\ a_{21} & & & & a_{2n} \\ & & & & \\ a_{n1} & & & & a_{nn} \end{pmatrix}=a_{1i}\Delta_{1i}$$