6/16. 今日の話題

・行列式の性質 (その1)

・行列式の計算 (その2)

先週の復習

行列式の計算 (その1)

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

= (黄の線に沿ってかけあわせたものの和)

− (赤の線に沿ってかけあわせたものの和)

例

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = (-1) + 1 + 1 - (-1-1-1) = 1 + 3 = 4 \text{〃}$$

ここでもう一度行列式の定義を書いておく.

S_n = ($1 \sim n$ の 1対1 対応)

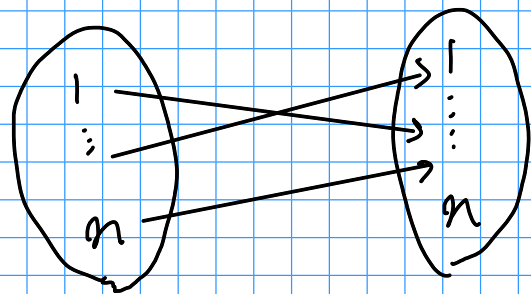
$A = (a_{ij})$ に対し

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{(\sigma\text{の転倒数})}$$

この Σ がどれだけ複雑かを見るために

S_n の個数を考える.



これらの 1対1 対応は $1 \sim n$ を並べた数列で表せる.

例 $n = 5$ のとき　13524

$1 \to 1$　$2 \to 3$　$3 \to 5$　$4 \to 2$　$5 \to 4$

1〜nを並べる並べ方は $_nP_n = n!$

だけある。よって

行列 2×2 … 2項

3×3 … $3! = 6$ 項　↑人が直接計算できる

4×4 … $4! = 24$ 項　↓ムリ

5×5 … $5! = 120$ 項

そこで大きいサイズの行列の行列式を計算するためには、行列式の性質を知る必要がある。

行列式の性質（その1）… 多重線型性。

これまでに行列に関して次の3つの操作を良く用いた。

1) 行に他の行の定数倍を加える。
2) 行を定数倍する。
3) 行と行を入れかえる。

行列式はこれらの操作で

1) 変わらない。
2) ~~行列のサイズを $n\times n$,~~ c倍したときには $c^{\cancel{n}}$ 倍される。
3) (-1) 倍される。

これともう1つ行列式の性質を用いると、多くの行列の行列式が計算できる。

問 $\det\begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & a_{12} \ddots & \\ O & & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}\cdots a_{nn}$ を示せ。

行列式の定義は

$$\sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}$$

σに対応する1〜nの並びの転倒数 >0 とする。

（13524の転倒数　$0+0+0+2+1=3$）

このとき $i<j$ かつ $\sigma(i)>\sigma(j)$

となるものがある。

（上の例では　$3<4$　$\sigma(3)=5>2=\sigma(4)$）

すると この σ に対応する項

$$a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots \cdots \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$i > \sigma(i)$ よりこの元は
対角線の下にある $= 0$

よって $\sigma(i) = i$ となる項だけが生き残り,

$$\det\left(\quad \right) = \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{11} \cdots a_{nn}$$

$12 \cdots n$ と並んだ数の転倒数は 0.

よって $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^0 = 1$.

以上より $\det\left(\quad \right) = a_{11} \cdots a_{nn}$

Q

$$\det\begin{pmatrix} 0 & & a_{1n} \\ & & a_{2n-1} \\ & \iddots & \\ a_{n1} & & * \end{pmatrix}$$ を求めよ

行列式の計算の例.

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ を求めてみよう.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(-1) は
行列式の値が
-1倍される
という意味

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

以下, これらの操作で何故行列式が変化あるいは定数倍されるのかについて述べる.

② 行を定数倍したとき.

$A = (a_{ij})$ の i 行を c 倍したとする.
又 c 倍した行列を $A' = (a'_{ij})$

すると $a'_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & (i \neq k) \\ c\,a_{ij} & (i = k) \end{cases}$

定義より

$$\det A' = \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a'_{1\sigma(1)} \cdots a'_{k\sigma(k)} \cdots a'_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, c\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{k\sigma(k)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$= c \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{k\sigma(k)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$= c \det A$$

③. 行と行を入れかえたとき.

$A = (a_{ij})$ の k, l 行を入れかえたものを $A' = (a'_{ij})$ とする $(a'_{kj} = a_{lj},\ a'_{lj} = a_{kj})$

$$\det A' = \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}\,\sigma\, a'_{1\sigma(1)} \cdots a'_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}\,\sigma\, a_{\sigma(1)} \cdots a_{l\sigma(k)} \cdots a_{k\sigma(l)}\, a_{n\sigma(n)}$$

ここで τ を k と l だけを入れかえる S_n の元とする.

$$a_{1\sigma(1)} \cdots a_{l\sigma(k)} \cdots a_{k\sigma(l)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$= a_{1\sigma\circ\tau(1)} \cdots a_{k\sigma\circ\tau(k)} \cdots a_{l\sigma\circ\tau(l)}\, a_{n\sigma\circ\tau(n)}$$

より

$$\det A' = \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma\circ\tau(1)} \cdots a_{n\sigma\circ\tau(1)}$$

$\mathrm{sgn}(\sigma\circ\tau) = -\mathrm{sgn}(\sigma)$ より.

(転倒数は ± 1 するので)

$$\det A' = -\sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma\circ\tau)\, a_{1\sigma\circ\tau(1)} \cdots a_{n\sigma\circ\tau(n)}$$

$$= -\sum_{\sigma\circ\tau\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma\circ\tau)\, a_{1\sigma\circ\tau(1)} \cdots a_{n\sigma\circ\tau(n)}$$

$$= -\det A$$

④ 行に他の行を加えたとき.

まず次の性質を確認する.

$A = (a_{ij})$ とし, さらに

$a_{kj} = b_{kj} + c_{kj}$ とする.

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ b_{k1}+c_{k1} & \cdots & b_{kn}+c_{kn} \\ \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

k行目だけ 2つの和.

$$= \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ b_{k1} & b_{kn} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ c_{k1} & c_{kn} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

補足.

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ b_{k1}+c_{k1} & \cdots & b_{kn}+c_{kn} \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \, a_{1\sigma(1)} \cdots (b_{k\sigma(k)} + c_{k\sigma(k)}) \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \, a_{1\sigma(1)} \cdots b_{k\sigma(k)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$+ \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \, a_{1\sigma(1)} \cdots c_{k\sigma(k)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

これから

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{k1}+c\,a_{l1} & \cdots & a_{kn}+c\,a_{ln} \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{k1} & a_{kn} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ c\,a_{l1} & c\,a_{ln} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\| \qquad\qquad$$

$$\det A$$

k行 = c × (l行)

このような行列の行列式 = 0