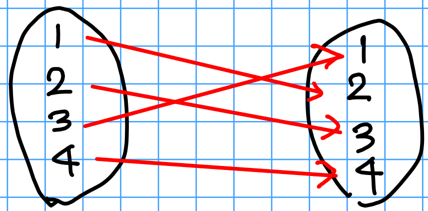
6/9. 期末 案 7/28

置換 集合 $\{1 \cdots n\}$ の間の1対1の対応。

$n=4$



上の置換を σ とすると

$\sigma(1) = 2$ (1は2にうつる。)

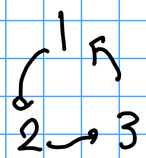
$\sigma(2) = 3$

$\sigma(3) = 1$

$\sigma(4) = 4$

置換の書き方

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad (1\ 2\ 3)$$



今日の話題

1) 転倒数
2) 互換
3) 行列式

・転倒数

$1 \sim n$ の数を並べた数列を考えよう。

例 $n=5$ 　 1 5 2 3 4

これらの列の転倒数を

その数より左側で真に大きいものの数の和

と定義する。

1 5 2 3 4

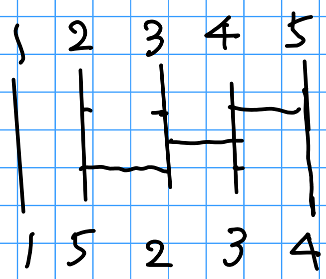
$0+0+1+1+1$ 　 左側で真に大きいものの数

$=3$

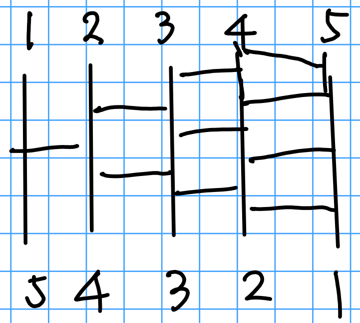
例 12345 の転倒数 $=0$

54321 〃 $=10$

ここで次の問題を考える



なようなあみだくじを作るには棒を何本、どこにつなげれば良いか？



$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

答　下の数列の転倒数の数だけ横棒を書き加えれば良い。

・互換　置換のうち、2つの文字のみを入れかえるものを互換という。

例　$(1\ 2)$　$(2\ 3)$

さて　置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ を例に取って上の問題を考えてみよう。互換　$\tau_1 = (4\ 5)$ との積は

$$\sigma \circ \tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

となるが、この下の列の転倒数 $= 9$

次に　$\tau_2 = (3\ 4)$ との積

$\tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

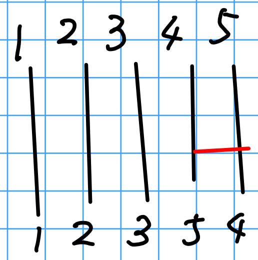
$$\sigma \circ \tau_1 \circ \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

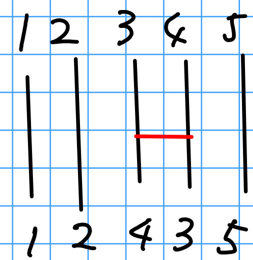
$\sigma \circ \tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

下の列の転倒数は　8.

Q　転倒数 $= 0$ の列は　$1\ 2\ 3\ 4 \cdots n$ のように順に並んでいるものに限ることを示せ。

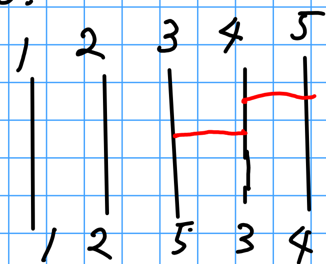
さて　互換はあみだくじで簡単に表現することができる。

$\tau_1 =$


τ_2


又　互換どうしの積はあみだくじを"連結"することで表現できる。

$$\tau_1 \circ \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$



以上の議論を言い換えると 適当な互換τの積を取れば、

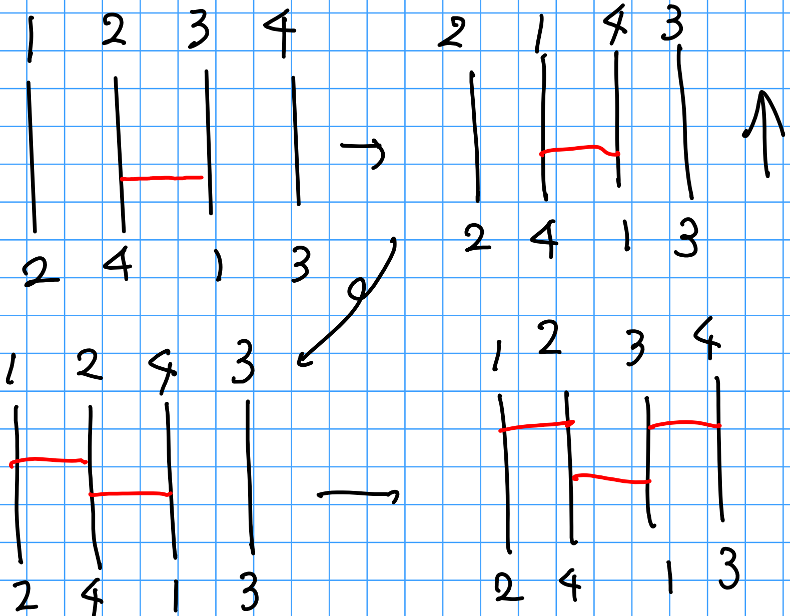
$$\sigma \circ \tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = e$$

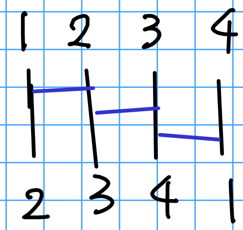
よって $\sigma = \tau_{10} \circ \tau_9 \circ \cdots \circ \tau_1$

互換τに関して $\tau^2 = e$ より $\tau = \tau^{-1}$

上の適切な互換、とは 左の数 > 右の数 となっている2つの数を入れかえるものである。

例





・行列式

定義 置換σの符号

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{(\text{転倒数})}$$

例 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $\mathrm{sgn}\,\sigma = (-1)^3 = -1$

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\mathrm{sgn}\,\sigma = (-1)^{10} = 1$

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\mathrm{sgn}\,\sigma = (-1)^3 = -1$

定義 $n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ の行列式

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

ただし S_n は n 次の置換、いいかえると $1 \sim n$ の間の1対1対応

この定義はこみ入っているので、$n=2,3$の場合をまず考えてみる。

$n=2$のとき、 $S_2 \ni \begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$

転倒数 $\quad 0 \qquad 1$

よって

$$A = \begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$$

$$\det A = 1\cdot a_{11}a_{22} + (-1)a_{12}a_{21}$$
$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

次に $n=3$のとき、

$$S_3 \ni \begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}^{0}, \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}^{2}, \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}^{2}$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}^{1}, \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}^{3}, \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}^{1}$$

転倒数

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + \boxed{a_{12}a_{23}a_{31}}$$
$$+ a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$
$$- \boxed{a_{11}a_{23}a_{32}}$$

この式をみやすくする工夫として

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$$

例

$$\det\begin{pmatrix}1&2&1\\1&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$$
$$= 0+0+(-1)-0-2-(-1)$$
$$= -1-2+1 = -2$$