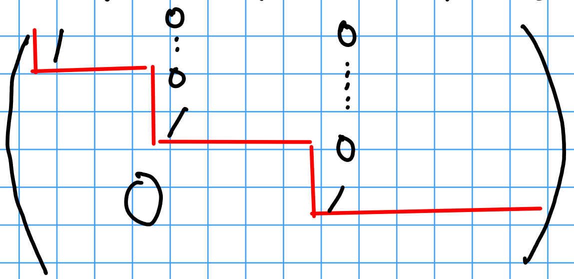
5/19. 5/26 中間試験

今日の話題 階段行列, 階数.

定義 行列が階段行列とは



- 赤線の下は全て0
- 左下のカドの所には1が入る.
- カドのある列は1以外は全て0

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

任意の行列は

1) 行に他の行の定数倍を足す.

2) 行と行を入れかえる

3) 0でない数で行を定数倍する.

の3つの操作をすることで階段行列に変形できる.

例

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 2 & 11 \\ 3 & 8 & 1 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & -8 & -6 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ 2行+(-2)\times 1行 \\ 3行+(-3)\times 1行 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ 3行\times\left(\frac{1}{2}\right) \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 11 & 8 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 1行+(-2)\times 2行 \\ \\ 3行+(-1)\times 2行. \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 11 & 8 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ 3行\times\left(-\frac{1}{2}\right) \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 6 \\ -5 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 22 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{11} & \frac{26}{11} \\ 0 & 1 & \frac{6}{11} & \frac{38}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

定義　行列 M の階数 $\mathrm{rank}\, M$ とは

M を階段行列に直したとき、全て 0 でない行の数のことを言う。

例

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 2 & 11 \\ 3 & 8 & 1 & 12 \end{bmatrix} = 3$$

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 6 \\ -5 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 22 \end{pmatrix} = 2$$

※ 階段行列に変形するやり方は色々ある。

⇒ 結果として出てくる階段行列も色々あるかもしれない。

⇒ 0 でない行の数も異なるかもしれない。

⇒ そこで、こうしたことがない、すなわち

(＊) 与えられた行列から 1)〜3) の操作によって階段行列を作ったとき、やり方にかかわらず 0 でない行の数は一定である。

を証明する必要がある。

証明の準備として次の行列を考える。

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \alpha & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow (i,j)\text{成分}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \alpha & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow (i,i)\text{成分}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 \\ & & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

(i,j), (j,i) 成分 1

(i,i), (j,j) 成分 0

P_1, P_2, P_3 を行列 M に右からかける。すなわち

MP_1 … j 列に i 列の α 倍が足される。

MP_2 … i 列が α 倍される。

MP_3 … i 列と j 列が入れかわる。

これらの行列をかけると、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{11} & \frac{2}{11} \\ 0 & 1 & \frac{6}{11} & \frac{38}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3列 + 1列 × $\left(-\frac{7}{11}\right)$
+ 2列 × $\left(-\frac{6}{11}\right)$ etc.

補題

行列 M に対し 行に関する 3つの操作をして 階段行列とし, その後, 列に関する 3つの操作をすると,

$$M \rightsquigarrow \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_r \ r \times r \text{ 単位行列}$$

補題

(Mの階数) = r

(証) M を階段行列に変形する.

$$\begin{pmatrix} 1 & * & 0 & * & 0 & * \\ & & 1 & & 0 & \\ & & & & 1 & \\ & 0 & & & & \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

列の入れかえ.

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \\ & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

列に他の列の定数倍足す.

以上の変形で 全て0でない行の数は変化しない. よって (Mの階数) = r

(※)の証明.

背理法である. すなわち

$M \rightsquigarrow M_1$ 階段行列で 0でない行の数 $= s$

$\rightsquigarrow M_2$ 〃 $= t$

$s < t$ と仮定する.

$$M_1 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} E_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} E_t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ となる.}$$

また, M を変形するとは M に適当な行列をかけることであった.

$P_1 M Q_1 = \begin{pmatrix} E_s & O \\ O & O \end{pmatrix}$ $\quad P_2 M Q_2 = \begin{pmatrix} E_t & O \\ O & O \end{pmatrix}$

よって $P_1^{-1} \begin{pmatrix} E_s & O \\ O & O \end{pmatrix} Q_1^{-1} = M$

$= P_2^{-1} \begin{pmatrix} E_t & O \\ O & O \end{pmatrix} Q_2^{-1}$

$P_2 P_1^{-1} = \begin{pmatrix} P_{1,11} & P_{1,12} \\ P_{1,21} & P_{1,22} \end{pmatrix}$ $\quad Q_1^{-1} Q_2 = \begin{pmatrix} Q_{1,11} & Q_{1,12} \\ Q_{1,21} & Q_{1,22} \end{pmatrix}$

etc. とおく。すると

$$\begin{pmatrix} P_{1,11} & P_{1,12} \\ P_{1,21} & P_{1,22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_s & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{1,11} & Q_{1,12} \\ Q_{1,21} & Q_{1,22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} P_{1,11} & O \\ P_{1,21} & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{1,11} & Q_{1,12} \\ Q_{1,21} & Q_{1,22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} P_{1,11} Q_{1,11} & P_{1,11} Q_{1,12} \\ P_{1,21} Q_{1,\cancel{21}\,11} & P_{1,21} Q_{1,12} \end{pmatrix}$$

$$= P_2 M Q_2 = \begin{pmatrix} E_t & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_s & O \\ O & Y \end{pmatrix}$$

よって

$P_{1,11} Q_{1,11} = E_{\cancel{t}\,s}$, $\quad P_{1,\cancel{12}\,11} Q_{1,12} = O$

$P_{1,21} Q_{1,\cancel{21}\,11} = O$ $\quad P_{1,21} Q_{1,12} = \cancel{O}$

ここで $P_{1,11}$ 及び $Q_{1,11}$ は逆行列が存在するので、$Q_{1,21} = P_{1,21} = O$

これは $P_{1,21} Q_{1,12} = Y = \begin{pmatrix} E_{t-s} & O \\ O & O \end{pmatrix}$, $Y \neq O$

に矛盾。

よって $s = t$.