5/12　5/26. 中間試験.

5/19. 予想問題を配ります.

今日の話題. 連立1次方程式を解く.

$$\begin{cases} -x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1-x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1+x_2-x_3+x_4=0 \\ x_1+x_2+x_3-x_4=0 \end{cases}$$

を解いてみよう.

(Ans　$x_1=-\frac{1}{4}$　$x_2=x_3=x_4=\frac{1}{4}$)

まず行列を使って方程式を書き直す.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

次に左と右の行列を合わせた行列を考える.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

↑ ここを3つの操作で単位行列にする.

① 行に別の行の定数倍を加える.

② 行を0でない数で定数倍する.

③ 行と行を入れかえる.

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$ ← 1行目 × (−1)

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ 2行 − 1行, 3 〃, 4 〃

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ 2行と3行を入れかえ

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ 2行 × $\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$ 1行 − 2行, 4行 − 2×2行

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow 3行\times\left(\frac{1}{2}\right) \\ \\ \end{array}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow 1行+3行 \\ \\ \\ \leftarrow 4行-2\times(3行) \end{array}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 \end{pmatrix} \quad 4行\times\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 \end{pmatrix} \leftarrow 求める答$$

例題

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - z = 2 \\ 4y + z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & -1 & -4 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow 3行目が全て0.$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

元の式に戻せば

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x - \frac{1}{2}z = 1 \\ y + \frac{1}{4}z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2}z \\ y = 1 - \frac{1}{4}z \end{cases}$$

z は任意.

Q $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - z = 2 \\ 4y + z = 0 \end{cases}$ に解がないことを示せ.

例題

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 4\\ 3 & 1 & 6 & 2\\ -1 & 2 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 3\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 2 & 4 & 3\\ 3 & 1 & 6 & 2 & 3\\ -1 & 2 & -2 & 1 & 1\end{array}\right)$$

このように変数の数≠式の数の場合

左側を次のような形の行列になるよう変形する.

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ & 0 & \vdots & \vdots\\ & 1 & \vdots & \vdots\\ & & 0 & \vdots\\ & 0 & 1 & 0\\ & & & 1\end{pmatrix} \leftarrow \text{階段行列}$$

上の行列の場合. 次のように計算する.

$$\rightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 4 & 3\\ 0 & -2 & 0 & -10 & -6\\ 0 & 3 & 0 & 5 & 4\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 5 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -10 & -5\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 2 & 0 & 1/2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2\end{array}\right)$$

※

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \leftarrow$$

これに別の列, あるいは

000…0 という行を

追加したものが

目指すべき形

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2\\ 0\\ 1/2\\ 1/2\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-2\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

さて変形した行列を式の形に直して

$$\begin{cases}x_1 + 2x_3 = 1/2\\ x_2 = 1/2\\ x_4 = 1/2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1 = \frac{1}{2} - 2x_3\\ x_2 = x_4 = 1/2\\ x_3 \text{ は任意}\end{cases}$$

連立方程式の解の図形的意味

$x+y+z=0$ の解を求めてみよう.

行列に直しても $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=0$

$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ ← 何も計算することはない.

解は $x=-y-z$ y, z 任意

このように解いたのかどうだかわからない答が出る.
そこで $x+y+z=0$ をみたす (x,y,z) が
3次元空間でどのような形をしているか考察する.
(昔の)高校では
$$ax+by+cz+d=0 \quad (a,b,c)\neq(0,0,0)$$
は3次元空間で平面を表すことを教えていた.
ここで簡単のために $d=0$ として,この事実を
考えてみよう.
$$ax+by+cz=0 \Leftrightarrow (a\ b\ c)\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0$$
$$\Leftrightarrow (a,b,c)\perp(x\ y\ z)$$
式の形から (x,y,z) はベクトル (a,b,c) と
直交することがわかる. よって $ax+by+cz=0$
は原点を通りベクトル (a,b,c) に垂直な
平面であることがわかった. 同様に考えて
$$a_1x_1+\cdots+a_nx_n=0$$ の解は
n次元空間のベクトル $(a_1\cdots a_n)$ に直交する
超平面をなす.

これから
$$\begin{cases} ax+by+cz=0\\ ex+dy+fz=0\end{cases}$$
の解の集合は直線となることが予想される.

例
2番目の例題 $\Rightarrow \begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-4&-1&-4\\0&4&1&4\end{pmatrix}$

式に戻して
$$\begin{cases} x+2y=3\\ -4y-z=-4\\ 4y+z=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=3\\ 4y+z=4\end{cases}$$
答 $x=1+\frac{1}{2}z \quad y=1-\frac{1}{4}z$
を書き直すと $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{4}\\1\end{pmatrix}$

・階数.
行列 A を3種の変形で階段行列
にしたとき, 0でない行の数を A の階数
といい, rank A で表す.

例

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rank} A = 1.$$