4/28

今日の話題　区分け、逆行列の計算方、
連立1次方程式（その1）

・区分け　行列の計算をするとき、

i行以下

j列以下

$$A = \left(\begin{array}{c|c} a_{11} & a_{1n} \\ \hline a_{n1} & a_{nn} \end{array}\right) \qquad B = \left(\begin{array}{c|c} b_{11} & b_{1n} \\ \hline b_{n1} & b_{nn} \end{array}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \qquad = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{pmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} a_{1\,j+1} & a_{1n} \\ a_{i\,j+1} & a_{in} \end{pmatrix}$$

$$A_{22} = \begin{pmatrix} a_{i+1\,j+1} & a_{i+1\,n} \\ a_{n\,j+1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

このように A, B を分割したとき、

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{\cancel{22}\,21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

$\because$ AB の (i,j) 成分は

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

一方 右辺の (i,j) 成分は、$A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21}$ の左上すみの成分、すなわち

$(A_{11}$ の i 行$) \cdot (B_{11}$ の j 列$)$

$\quad + (A_{12}$ の i 行$) \cdot (B_{21}$ の j 列$)$

$$= \sum_{k=1}^{j} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=j+1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

これは上の Σ を2つに分けて足したものに他ならない。

（(p, q) 成分がどうなるかは各自考えてみること）

さて、2×2行列では

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

特に $c=0$ のとき、

$$-a^{-1}bd^{-1}$$

$$= \frac{1}{ad}\begin{pmatrix} d & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{-1} & -ba^{-1}d^{-1} \\ 0 & d^{-1} \end{pmatrix}$$

となる。これを利用すれば

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ O & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

と考えられる。実際

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ O & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix}$$

※ $$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} \neq \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{12}A_{11}^{-1}A_{22}^{-1} \\ O & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

実際

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{12}A_{11}^{-1}A_{22}^{-1} \\ O & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E & -A_{11}A_{12}A_{11}^{-1}A_{22}^{-1} + A_{12}A_{22}^{-1} \\ O & E \end{pmatrix}$$

・逆行列の計算方

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$ を求めてみよう。

まず次のような行列を考える。

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ← 同じサイズの単位行列を右にくっつける。

1) 行に他の行の定数倍を加える。
2) 行を定数倍する。
3) 行を入れかえる。

① 1行と3行入れかえ

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

② 2行 + (−1)×1行

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

③ 3行 + (−2)×1行

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

④ 1行 + (−1)×2行

3行 + 2行

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

⑤ 3行 ÷ (−4)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}\right)$$

⑥ 1行 + (−3)×3行

2行 + 3行

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}\right)$$

左半分が単位行列になるよう、1)〜3)の操作を組み合わせて行う。

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と右半分が逆行列となる。このからくりを見るために次の行列を考える。

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1) を左からかけると、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d+ag & e+ah & f+ai \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

2行目に3行目×aを足したものが積となる。

同様に 2), 3) を左から掛けて.

2) …… 2行目をb倍

3) ‥ 1行目と2行目を入れかえる.

1), 2), 3) の行列を適当に変えることで
他の操作 例えば 1行目 + 2行目×c
2行目と3行目の入れかえに対応する行列
を得る.

1) i行にj行のα倍を加える.

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & \alpha & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

(i,j)成分

対角成分と(i,j)成分以外は全て0.

2) i行をβ倍

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \beta & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ i\text{行} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

対角成分以外は全て0.

3) i行とj行を交換

各自考えること.

逆行列が計算できる理由.

A ← 逆行列をもとめたい行列

$$\begin{array}{c} (A \quad E) \\ \downarrow \\ (P_1A \quad P_1) \\ \downarrow \\ (P_2P_1A \quad P_2P_1) \\ \downarrow \\ \vdots \\ (E \quad P_nP_{n-1}\cdots P_1) \\ \shortparallel \\ P_nP_{n-1}\cdots P_1A \end{array}$$

1), 2), 3) の操作に対応する行列を $P_1, P_2 \cdots P_n$ とする

・1次方程式の解法 (その1)

$$\begin{cases} x + y + 2z + w = -1 \\ x + y + 3z + 2w = 2 \\ 2x - 2y + 2z - w = -1 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$$

$x=1 \quad y=-3 \quad z=-2 \quad w=5$

与えられた方程式を次のように書き直す.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B}$$

$$\text{行列}\ (A\ B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ & & \vdots & & \end{array}\right)$$

ここを単位行列にするよう
1)~3) の操作をくり返す.

操作に対応する行列を $P_1 \cdots P_n$ とすると,

$$P_n P_{n-1} \cdots P_1 A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = P_n \cdots P_1 B$$

$$\Leftrightarrow \quad E \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = P_n \cdots P_1 B$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = P_n \cdots P_1 B$$

行列 (A B) を
A の部分が E に
なるよう変形したときの端の1列

具体的には

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$x = 1 \quad y = -3 \quad z = -2 \quad w = 5$