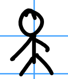
4/21 課題は可,不可の判定のみに使う.

 → テストで良い点数 } 秀 優 良

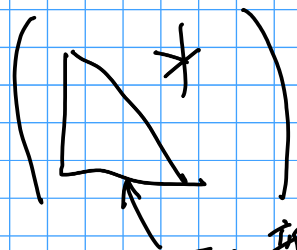
↘ 悪い点数 → ~~不可~~

課題を出してるか ⇒ 可

↘ 出してない ⇒ 不可

今日の話題 種々の行列及び種々の行列の計算

定義 上3角(or 上半3角行列)とは



この部分が0

例
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

下3角(or 下半3角)行列も同様に定義される.

数式を使って定義するならば

$A=(a_{ij})$ が上3角行列

$\Longleftrightarrow$ $a_{ij}=0$ $(i>j)$

定義 対角行列とは,上3角かつ下3角行列であるもの.数式で書くと

$A=(a_{ij})$ が対角行列

$\Longleftrightarrow$ $a_{ij}=0$ $(i \neq j)$

$$(\Longleftrightarrow) \quad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

※ これらの概念は正方行列すなわち行と列の数が等しいものに対してのみ定義される.

Q1. 対角行列と対角行列の積は対角行列となることを示せ.

(i) $A=(a_{ij})$ $B=(b_{ij})$ としたとき,

AB の (i,j) 成分 $= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$

$i \neq j$ とする.

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

$$= a_{i1} b_{1j} + \cdots + a_{ii} b_{ij} + \cdots$$

$$\cdots + a_{ij} b_{jj} + \cdots + a_{in} b_{nj}$$

A, Bは対角行列なので

$$a_{ij} = b_{ij} = 0 \quad (i \neq j)$$

よって $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = 0$

これは AB が対角行列であることを意味する.

・ここからしばらく形式的な計算を行う

Q. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \cdots$$

$$\cdots (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \cdots$$

を示せ.

☺ まず e^x について考察する.

$$e^x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

とかけたとしよう. 両辺を微分すれば

$$e^x = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots$$

右辺の係数を比較すれば

$$a_0 = a_1$$

$$a_1 = 2a_2$$

$$\vdots$$

$$a_n = (n+1) a_{n+1}$$

両辺に $x=0$ を代入すれば, $a_0 = a_1 = 1$

よって

$$a_2 = \frac{1}{2} \quad a_3 = \frac{1}{3} a_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$a_4 = \frac{1}{4} \cdot a_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \quad \cdots$$

次に $\log(1+x)$ について, やはり

$$\log(1+x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

かけたとしよう.

両辺微分すると

$$\frac{1}{1+x} = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots\cdots$$

ここで等比級数の和の公式を思い出そう

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}x^n = \frac{1-(-x)^n}{1-(-x)}$$

$n \to \infty$ とし，$|x| < 1$ とすれば

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots\cdots = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x}$$

辺々比較して

$$a_1 = 1 \quad 2a_2 = -1 \quad 3a_3 = 1 \quad \cdots$$

より $a_n = (-1)^{n-1} \times \frac{1}{n}$ を得る.

さて，多項式（場合によっては級数）には

正方行列を代入することができる.

例 $x+1$ $\quad x = A$ を代入 $\Rightarrow A + E$

$x^2 + 2x + 1 \quad \Rightarrow A^2 + 2A + E$

$$e^A := E + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots\cdots$$

$$\log(E + A) = A - \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3}A^3 \cdots\cdots$$

と行列 A の exp や log を定義できる.

先の形式的な計算で

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 \cdots\cdots$$

となることが示せるので，$\sin A$，$\cos A$ なども

考えることはできる．ここで注意して欲しいのは.

$e^{A+B} = e^A \cdot e^B$ は行列では成立しない.

$$e^{A+B} = E + (A+B) + \frac{1}{2}(A+B)^2 + \cdots$$

$$e^A \cdot e^B = \left(E + A + \frac{1}{2}A^2 + \cdots\right)\left(E + B + \frac{1}{2}B^2 + \cdots\right)$$

$$A^2 + AB + BA + B^2$$

$$\shortparallel\!\!\!\!/$$

$$A^2 + 2AB + B^2$$

行列の積は可換ではない.

定義 正方行列 A の逆行列とは

$$XA = AX = E$$

となる逆行列のことである。

補題 行列 A に対し $X_1 A = E$ をみたす行列があったとする。一方 $AX_2 = E$ をみたす行列があるとすれば、$X_1 = X_2$.

$\because$
$$X_1 = X_1 \cdot E = X_1 \cdot AX_2 = E \cdot X_2 = X_2$$

一般に行列の逆行列を計算することは難しい。一般的な求め方は後にまわし、今日は特殊な形の行列についてのみ考える。

行列 A が $A-E$ がべき零、すなわち

$$(A-E)^l = 0 \quad l \gg 0 \ (l \text{ が十分大きいの意味})$$

となるとき、

$$(1-x)\cdot(1+x+x^2+\cdots\ ) = 1$$

に x として $E-A$ を代入すれば

$$\underbrace{(E-(E-A))}_{=A}(E+(E-A)+\cdots+(E-A)^{l-1}) = E$$

特に

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=A-E} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=E}$$

$$(A-E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (A-E)^3 = O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = E + (E-A) + (E-A)^2 + \underbrace{(E-A)^3}_{=O} + \cdots$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。このやり方の他に、

行列の区分け.　$\xleftarrow{j\text{列}}$　$\xrightarrow{j+1\text{列}}$

$$A = \left(\begin{array}{c|c} a_{11} \quad \cdots & a_{1n} \\ \hline a_{mn} & a_{mn} \end{array}\right) \begin{array}{l} m\times n\text{行列} \\ \uparrow i\text{行以上} \\ \downarrow i+1\text{行} \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

1〜i行, 1〜j列の成分を行列A_{11}で見ている.

標語的には 大きな行列を小さな行列の集まりと考えている. さて

行列 A, B があり, A, B が

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

と同じ行, 列で区分けされているとする.

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & * \\ & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

さて, これを使って

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

の逆行列を求めたいとき,

$\Updownarrow$

$$\begin{pmatrix} E & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

↑ メモ