授業の内容

1. 行列の計算
2. 連立一次方程式が解ける.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

3. 行列式の定義を理解し、その計算ができること.

成績評価 7/28 or 8/2

中間 + 期末で評価.

次回からレポート出題

(4/21) 5/26 or 6/2 or 6/9

今回の課題の解答例

問1. (1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

問2.

(1) $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

例を与えるときはまず簡単なものから考えよう.

(2) ケーリーハミルトンの式より

$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ とすれば

$$X^2 - (x+w)X + (xw-yz)I = O$$

よって $x+w = xw-yz = 0$ なる行列

X を取れば, $X^2 = O$ となる.

X の例として $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(3) (2) と同様に考えれば

$x+w=0 \quad xw-yz=-1$

となる行列 X を取れば $X^2 = I$ となる.

$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

・$n \times \cancel{n}$ m 行列.

数を n 行 m 列の長方形に並べたものを行列という.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \cdots & 5 \\ 100 & -3 & \sqrt{2} & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & \vdots \\ \pi & e & -8 & \cdots & 14 \end{pmatrix}$$

横の並びを 行
縦の並びを 列 という.

A, B $n \times m$ 行列

i行j列の数

$A \pm B := \{ A$の(i,j)成分 $\pm$ Bの(i,j)成分$\}$

と定める.

Ex. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+9 & 2+8 & 3+7 \\ 4+6 & 5+5 & 6+4 \\ 7+3 & 8+2 & 9+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1-9 & 2-8 & 3-7 \\ 4-6 & 5-5 & 6-4 \\ 7-3 & 8-2 & 9-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -6 & -4 \\ -2 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

次に行列の積を定義するが,まず $1 \times n$ 行列と $n \times 1$ 行列の積を定義する.

$1 \times n$ 行列 … n 個の数が横に並んだもの
$n \times 1$ 〃 〃 縦 〃

よってこれら2つの行列は文字を用いて

$1 \times n$ 行列 $(a_1 \ a_2 \ \ a_n)$

$n \times 1$ 行列 $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

さて2つの行列の積を

$$(a_1 \cdots a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

と定義する.
(成分どうし掛けあわせて和を取る.)

次に用語を1つ定める.

$n \times m$ 行列の i 行目の並びを i 行ベクトル

j 列 〃 j 列ベクトル

Ex. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ 2行ベクトル $= (4 \ \ 5 \ \ 6)$

1列ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

$n \times m$ 行列 A と $m \times l$ 行列 B の積の行列 C を

C の (i, j) 成分

$=$ (A の i 行ベクトル) $\times$ (B の j 列ベクトル)

Ex. $\underset{3 \times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}} \cdot \underset{3 \times 1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

の $(1, 1)$-成分 $=$ (A の 1行ベクトル) $\times$ (B の 1列ベクトル)

$= (1 \ \ 2 \ \ 3)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1$

$= 1 + 2 + 3 = 6$

$(1, 2)$-成分 $= 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 1 = 15$

$(1, 3)$-成分 $= 7 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 9 \cdot 1 = 24$

よって

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 24 \end{pmatrix}$$

※ 次のような行列の積はない.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$A \cdot B$ が定義されるのは、

A の列の数 $=$ B の行の数

のときのみ.

補題 $m \times n$ 行列 A

$n \times l$ B

$l \times k$ C に対し

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(i, j)-成分を　a_{ij} で表した。

$B = (b_{ij})$　　$C = (c_{ij})$ とおく。

AB の (i. j)-成分

$= (A$ の i 行ベクトル$) \times (B$ の j 列ベクトル$)$

$$= (a_{i1} \cdots a_{in}) \times \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$$

$$= a_{i1} b_{1j} + \cdots + a_{in} b_{nj}$$

$$= \sum_{p=1}^{n} a_{ip} b_{pj}$$

BC の (i, j)-成分 $= \sum_{q=1}^{l} b_{iq} c_{qj}$

よって

$(AB) \cdot C$ の (i, j) 成分は

$$= \sum_{r=1}^{l} \left(\sum_{p=1}^{n} a_{ip} b_{pr} \right) c_{rj}$$

$A \cdot (BC)$ の (i, j) 成分は

$$= \sum_{r=1}^{n} a_{ir} \left(\sum_{q=1}^{l} b_{rq} c_{qj} \right)$$

この2つが等しいことを確認する。

$$\sum_{r=1}^{l} \left(\sum_{p=1}^{n} a_{ip} b_{pr} \right) \cdot c_{rj}$$

$$= \sum_{p=1}^{n} \sum_{r=1}^{l} a_{ip} b_{pr} c_{rj}$$

$$= \sum_{p=1}^{n} a_{ip} \left(\sum_{r=1}^{l} b_{pr} c_{rj} \right)$$

Σ の文字の対応を見れば、2つの和が同じものであることがわかる。