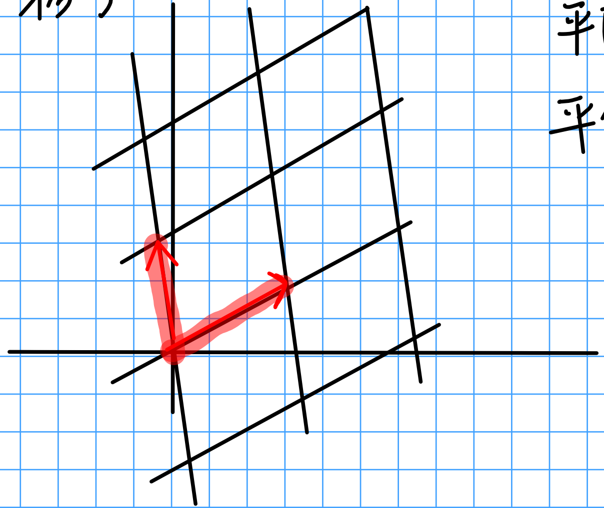
22世紀の数学 (お話).

• 格子の moduli

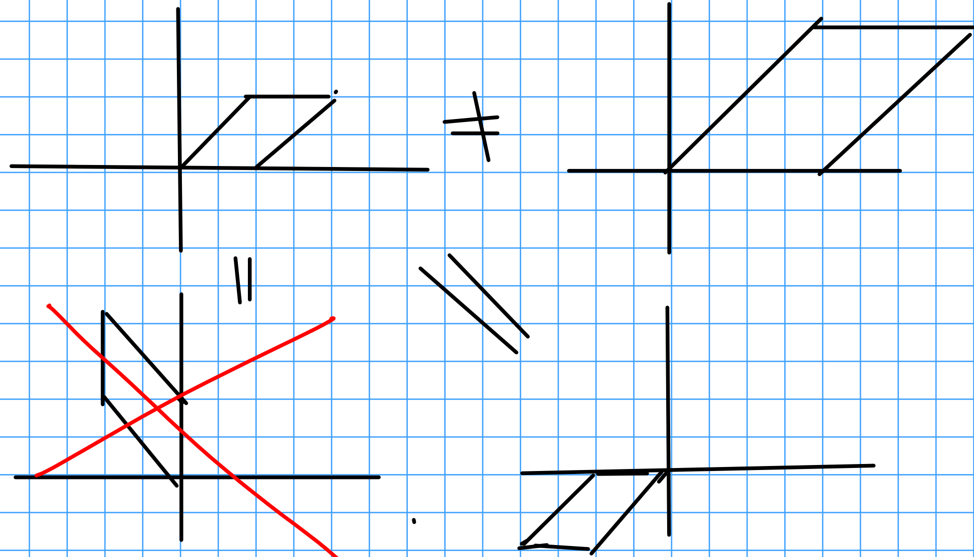
格子



平面を合同な平行四辺形でうめつくす

Q. 埋めつくし方は"本質的に"どれだけあるか?

"本質的" ⇐ 今日は回転,平行移動で重なるものは同じ,と見る.



さて,埋めつくし方 or 平行四辺形は2つベクトルを与えれば定まる. ここでは座標平面を複素平面だと思って考えるので

ベクトルは 複素数 に対応する.

(a, b) 　 $a+bi$

$a+bi$, $c+di$ の2つで張られる平行四辺形

$a'+b'i$, $c'+d'i$ 〃

同じと見なせるのはどのような時か?

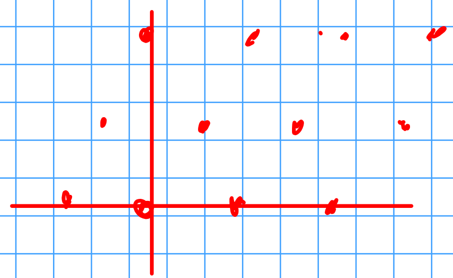
$GL(2,\mathbb{Z}) = \{$ 整数を成分とする行列で逆行列も整数を成分とするもの $\}$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c' \\ d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

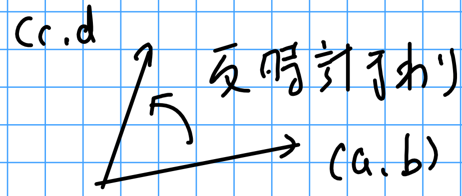
となる時 同じとみなす。

感覚的には格子の"頂点"を不変にする変換でうつりあうものは同じとみなしている。

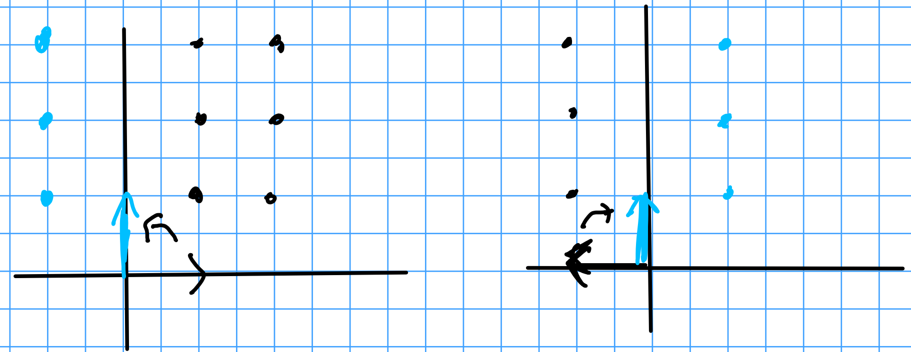


今回はこの問題をさらに限定して ベクトル (a,b) から (c,d) への向きは

正の向き, すなわち



正の向きを保つもののみを同じとみなすことにする。



上の例は違うものとみなす。

- Eisenstein 級数

複素数 ω_1, ω_2 に対し次の級数を考える。

$$\sum_{(m,n)\in \mathbb{Z}^{\oplus 2}\setminus(0,0)} \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^k}$$

$(0,0)$ でない全ての整数の組にわたって和を取る。

これを Eisenstein 級数 $G_k(\omega_1,\omega_2)$

と呼ぶ。定義から

$$G_{2k-1}(\omega_1,\omega_2)=0 \qquad (k\geq 2)$$

$$\left(\frac{1}{(m\omega_1+n\omega_2)^{2k-1}}+\frac{1}{(-m\omega_1-n\omega_2)^{2k-1}}\right)=0$$

より

さて、この級数を使うと、次のことが言える。

定理

(1) 平行四辺形 (ω_1,ω_2), (ω_1',ω_2') で張られる格子が先の意味で同じであるのは

$$G_4(\omega_1,\omega_2)=G_4(\omega_1',\omega_2')$$

$$G_6(\omega_1,\omega_2)=G_6(\omega_1',\omega_2')$$

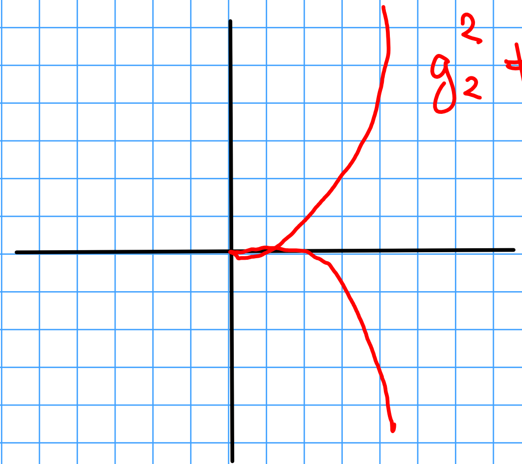
である時。

(2) 平行四辺形 (ω_1,ω_2) に対し

$$\{平行四辺形の集合\}\longrightarrow \mathbb{C}^2\setminus g_2^3-27g_3^2$$

但し g_2,g_3 は $\mathbb{C}^2$ の座標

は全射



$g_2^2+27g_3^2$

$q\prod(1-q^{24})^n \fallingdotseq 0$

と一致する。

• ℘ ペー Weierstrass の ℘ 関数

$$\wp(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus(0,0)}\frac{1}{(z-m\omega_1-n\omega_2)^2}$$

次ページにつづく

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum \left\{ \frac{1}{(z - m\omega_1 - n\omega_2)^2} - \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^2} \right\}$$

これを書き直すと

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) G_{2n+2} z^{2n}$$

何故なら

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots\cdots$$

$$\frac{1}{\gamma - z} = \frac{1}{\gamma} \frac{1}{1 - \frac{z}{\gamma}} = \frac{1}{\gamma}\left(1 + \frac{z}{\gamma} + \frac{z^2}{\gamma^2} + \cdots\right.$$

$$\frac{1}{(\gamma - z)^2} = \frac{1}{\gamma^2}\left(1 + \frac{z}{\gamma} + \frac{z^2}{\gamma^2} + \cdots\right)^2$$

$$= \frac{1}{\gamma^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{z^{2n}}{\gamma^{2n}}$$

式変形 ↓ について.

$$\left(1 + \frac{z}{\gamma} + \frac{z^2}{\gamma^2} + \cdots\right)\left(1 + \frac{z}{\gamma} + \frac{z^2}{\gamma^2} + \cdots\right)$$

左と右のカッコの中から1つずつ項をえらんでかけあわせ $\frac{z^{2n}}{\gamma^{2n}}$ を作ることを考える.

$\frac{z^{2n}}{\gamma^{2n}} = \frac{z}{\gamma} \cdot \frac{z^{2n-1}}{\gamma^{2n-1}}$ のように異なるものから

作るやり方は　$2n$ とおり

$\frac{z^{2n}}{\gamma^{2n}} = \frac{z^n}{\gamma^n} \cdot \frac{z^n}{\gamma^n}$ 同じもの 1とおり

そして $\gamma = m\omega_1 + n\omega_2$ とすると.

左上の式がわかる. つまり

$$\Sigma\text{の中} = \frac{1}{\gamma^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \frac{z^{2n}}{\gamma^{2n}}$$

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)2n G_{2n+2} z^{2n-1}$$

この2つの関数を使って

$$\wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3$$

$$g_2 = 60G_4 \quad g_3 = 140G_6$$

を考える。実は

$$\wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3 = 0$$

となる。これから

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 + g_2\wp(z) + g_3$$

を得る。両辺を z で微分すると

$$2\wp'(z)\wp''(z) = 12\wp(z)^2\wp'(z) + g_2\wp'(z)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \wp''(z) = 6\wp(z)^2 + g_2$$

これを書き直して

$$\frac{6}{z^4} + \sum (2n+1)2n(2n-1) G_{2n+2} z^{2n-2}$$
$$= 6\left(\frac{1}{z^3} + \sum (2n+1) G_{2n+2} z^{2n}\right)^2 + g_2$$

両辺の係数を比較すると

$$G_{2k} = \frac{3}{(2k-1)(2k+1)(k-3)} \sum_{\substack{i+j=k \\ i,j \geqq 2}} G_{2i}G_{2j}$$

この漸化式から G_{2k} の値は G_4, G_6 だけで決定される。

例 $\quad G_8 = \frac{3}{7}G_4^2 \quad G_{10} = \frac{5}{11}G_4G_6$

これから先の定理の(1)がわかる。

・母空間

先の定理で

$$g_2^{\cancel{2}\,3} - 27\, g_3^{\cancel{3}\,2} = q \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{24})^n$$

$$g_2 = 60\, G_4(\tau, 1), \quad g_3 = 140\, G_6(\tau, 1) \qquad q = \exp(2\pi i \tau)$$

先週 $\dfrac{1}{\prod(1-q^n)} = \sum(\text{分割数})\cdot q^n$

このように $\prod(1-q^n)$ は数学の様々な分野に顔を出す。2000年代に入り、この関数が出現する新しい現象が（物理学者（Witten-Vafa））により、発見された。

S K3曲面（4次元多様体）

$S^{[n]}$ 対称積の Blow up

$e(S^{[n]})$ $S^{[n]}$ のオイラー数

$$\sum e(S^{[n]})\, q^n = q \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{24})^n$$

多様体（図形）は1つだけを取り出してみるのではなく、多数のものを同時に見た方が自然なのではないか？