http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~matusita/lecture/2009/survey/index.html

今日の話題

1. 分割数

2. (形式)巾級数

3. 母関数 (generating function)

— まとめて見ることで，はじめてわかることがある. —

1. 分割数

nを自然数とする. nをより小さい自然数の和としてあらわすことを考える.

$$4 = \overset{4}{\vee} 3+1,\ 2+2,\ 2+1+1,\ 1+1+1+1$$

加える順番を無視して このような分解の仕方は何通りあるか？

定義 $p(n) = \#\{$ nを自然数の和として表すやり方 $\}$

$p(1) = 1$	$p(2) = 2$	$p(3) = 3$
$p(4) =$ ~~4~~ 5	$p(5) = 7$	$p(6) = 11$
$p(7) = 15$	$p(8) = 22$	$p(9) = 30$

上の数値に規則性はあるか？

⇒ Yes.

$$p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) \cdots\cdots$$

$$p(3) = p(2) + p(1) - p(-2) - p(-4)$$

p(マイナスの数) $= 0$ とすれば 上式は

$3 = 2+1$ となっている.

$p(8) = p(7) + p(6) - p(3) - p(1)$

$22 = 15 + 11 - 3 - 1$　O.K.

次に $p(n)$ の仲間を紹介する.

$p(k, n) = \#\{$ n を k 以上の数で分割するやり方 $\}$

$p(1, n) = p(n)$

$p(n, n) = 1$

- $p(k, n)$ と $p(n)$ の関係

$$1 + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} p(k, n-k) = p(n)$$

何故なら $p(k, n-k) = \{$ $n-k$ の k 以上の分割の数 $\}$

$n-k$ を k 以上の数で分割するやり方

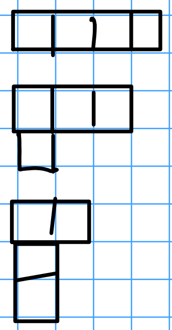
$\underset{1:1}{\Longleftrightarrow}$ n を k とそれ以外（k 以上）で分割するやり方

- Young diagram

n の分割　$n = n_1 + \cdots + n_m$

$(n_1 \geqq \cdots \geqq n_m)$

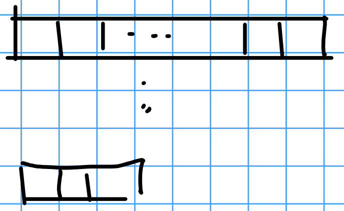
に対して, 次のような図を対応させる.



$n = 4 = 4$

$n = 4 = 3 + 1$

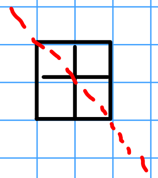
$n = 4 = 2 + 1 + 1$



← 1行目　n_1 コ

← m行目　n_m コ

この図を使うと，次のようなことがわかる．

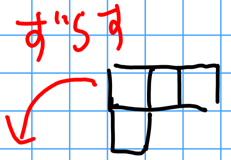


$n = 4 = 2+2$

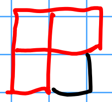
← この線に関して対称

このように対称なものはいくつあるか？

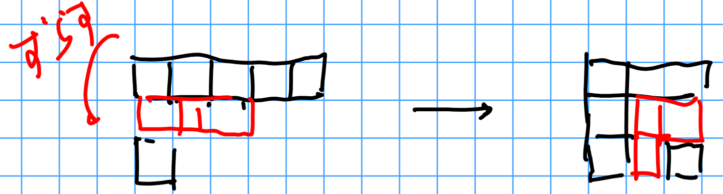
= n を異なった奇数で表すやり方



$n = 4 = 3+1$



$n = 2+2$ （対称）



Q. #{n を kコ以下の数で分割するやり方}

$\parallel$

#{n を k以下の数で分割するやり方}

$\parallel$

#{n+k を丁度 kコに分割するやり方}

2. （形式）巾級数

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ を形式巾級数という．

形式巾級数どうしの積を

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{\substack{i+j=k\\ i,j\geqq 0}} a_i b_j x^k\right)$$

$$= a_0b_0 + (a_1b_0 + a_0b_1)x$$
$$+ (a_2b_0 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \cdots$$

例 $(1-x)\cdot(1+x+x^2+ \cdots\cdots)$

$$= (1-x)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)$$

$1-x$ は $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ で $a_0=1,\ a_1=-1$

$a_k=0 \quad (k \geqq 2)$

$$(1-x)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k\right)$$

$$= b_0 + (-b_0+b_1)x + (-b_2+b_1 x^2$$

$$+ (-b_3+b_2)x^3 + \cdots$$

$1+x+x^2+\cdots$ は $\forall k \quad b_k=1$

なので

$$(1-x)\cdot(1+x+x^2+\cdots) = 1$$

これは次の形で使うことが多い

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots$$

※ $x=0.01$ の場合

$$\frac{1}{1-x} = 1+0.01+\overbrace{(0.01)^2+\cdots}^{\text{ゴミ}}$$

$\fallingdotseq 1.01$

3. Euler の 5角定理 (母関数)

- 母関数

$p(0)=1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 7x^5 + \cdots$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^n)}$$

$$= \frac{1}{(1-x)}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdots$$

まず この式を証明する.

$$右辺 = (1+x+x^2+\cdots)$$
$$\times(1+x^2+x^4+\cdots)$$
$$\times(1+x^3+x^9+\cdots)$$
$$\times(1+x^4+x^{16}+\cdots)$$

$(1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)\cdots$

の 0次の項は … 1 ← 全てのカッコで 1を取ってかけあわせ

1次の項は … x 1つx その他1

2次の項は … $2x^2$ 1つ目から x^2 2つ目から x^2

3次の項は … $3x^3$

4次の項は … $x^4+x^{3+1}+x^{2+2}+x^{2+2\cdot1}$

$+x^{4\cdot1}$

$=$ $1+x^4+x^{16}+\cdots$ から x^4

$1+x^3+x^9+\cdots$ から x^3

$1+x+x^2+\cdots$ から x かけあわせ

$1+x^2+x^4+\cdots$ x^4 を取る.

このように x^n を各カッコから取って作る取り方は

$$n=a_1n_1+\cdots+a_mn_m \quad (n_1\geqq\cdots\geqq n_m)$$

(同じ数はまとめた.)

n_i 番目のカッコ

$(1+x^{n_i}+x^{2n_i}+\cdots)$

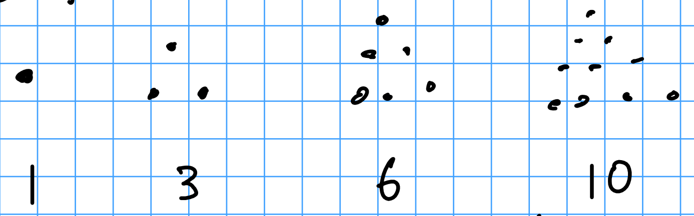
から $x^{a_in_i}$ を取ってかけあわせれば

出来るので 右辺の x^n の係数は

p(n) となる.

- 5角数

3角数とは



のように3角形に並べた点の個数

5角数　図は省略

点を5角形に並べたものの点の数

一辺がnのものは $\frac{n(3n-1)}{2}$ となる.

一方この式にマイナスの数を代入しても自然数が出る.

例　$n=-1$　$\frac{-1\cdot(-4)}{2} = 2$

$n=-2$　$\frac{-2\cdot(-7)}{2} = 7$

これらを拡大五角数という.

定理 (Euler)　(18世紀のこと.)

$$(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^n)\cdots$$

$$= 1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}\cdots$$

拡大五角数の中のみあらわれる.

先の式

$$\sum p_n x^n = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^n}$$

とあわせると

$$\left(\sum \overset{p(n)}{\cancel{p_n}}x^n\right)\prod(1-x^n) = 1$$

$$\left(\sum \overset{p(n)}{\cancel{p_n}}x^n\right)(1-x-x^2+x^5+x^7\cdots) = 1$$

上式のn次の係数を見ると,

左辺のn次の係数

$$= \underset{p(n)\cdot 1}{p(n)} - \underset{p(n-1)\cdot(-1)}{p(n-1)} - p(n-2) + p(n-5) + p(n-7) \cdots$$

定理の証明.

$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots$

の n 次の係数を考える. これは

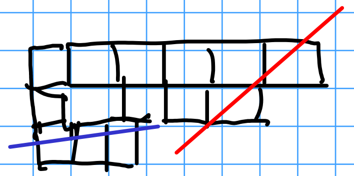
#{ n を異なった数で表す表し方 のうち偶数個の和になるもの }

− #{ n を異なった数で表す表し方 のうち奇数個 ~ }

上のような n を異なる数で分割する

やり方を1つ固定して考える. 対応する

Young diagram は



$n = 14$

{ 3つの数の和 $= 6+5+3$

最下段の個数 … k コ

対角線(右端) … s コ

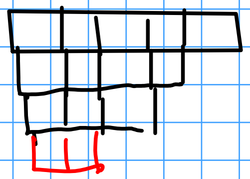
$k > s$ であることに注意

$k \geq s+2$ である場合

このとき, / を取って — の下に

つけて n の新しい分割ができる.

先の例では



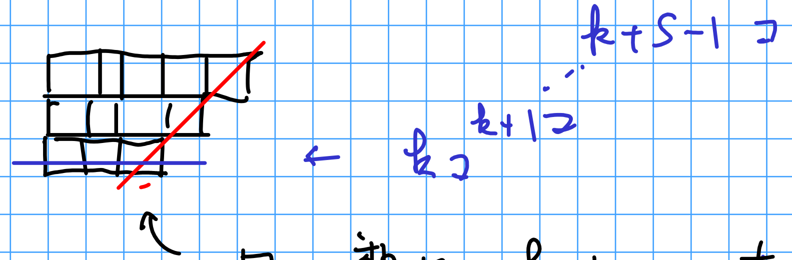
{ 4つの数の和

逆に下の2つを取って対角線につければ

元に戻る よって $k = s$ または $k = s+1$

のものだけが展開式の中に出てくる.

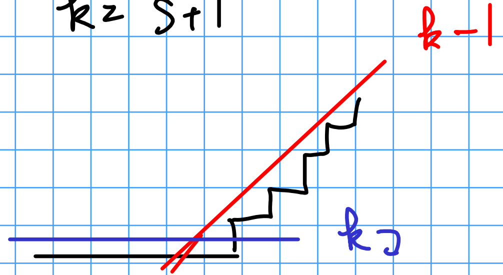
$k = s$



□の数は $k + \cdots + 2k-1$

$$= \frac{k(3k-1)}{2}$$

$k = s+1$

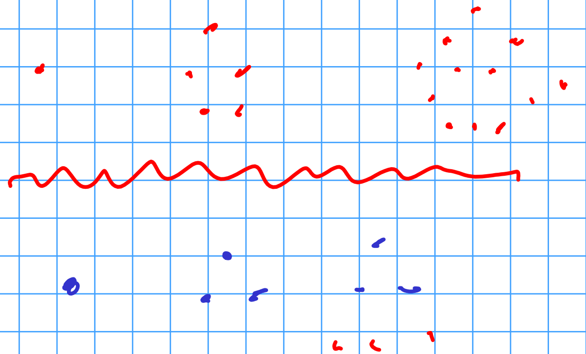


□の数は $k + \cdots + 2k-2$

$$= \frac{m(3m-1)}{2}$$

出てくるのはこれだけ！

※ レポート問題に修正と追加があるので、ホームページからダウンロードしてください



問3のヒント