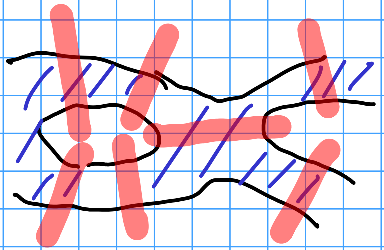
5/13 トポロジー

5/20 整数論

6/2 22世紀の数学？

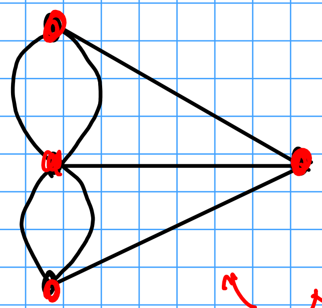
・トポロジー

ケーニヒスブルクの橋わたり



すべての橋を徒歩で1回だけわたれるか？

Eulerはこの問を次のように考えた。



・頂点…島か岸

— 辺 … 橋

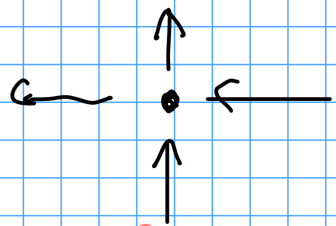
全て奇点

・からスタートして全ての辺を通ることができれば良い。

・偶点 …… その点から偶数の辺が出ている。

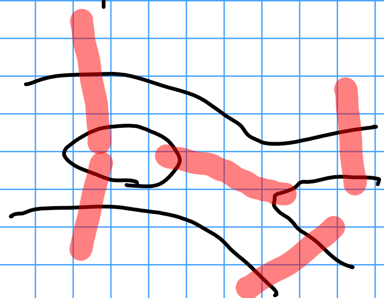
・奇点 … 〃 奇数

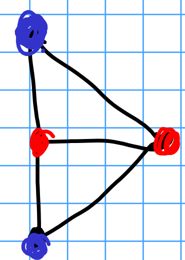
偶点は始点にも終点にも中間の点にもなれる。一方奇点は始点か終点にしかなれない



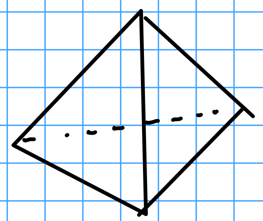
入り口と出口がないと中間点になれない。

現在





立体の3角形分割



正四面体

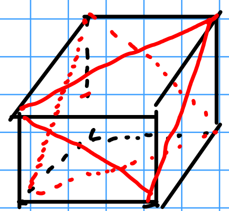
頂点	4
辺	6
面の数	4

頂点の数 − 辺の数 + 面の数 = 2

正20面体が描かれていると想像

頂点	12
辺	30
面の数	20

頂点の数 − 辺の数 + 面の数 = 2



各面を3角形に分割する.

すると

頂点	辺	面
8	18	12

$8 - 18 + 12 = 2.$

定理 Eulerの定理

球面を3角形で分割したとき,

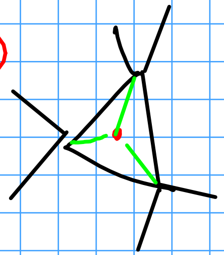
\# 頂点 − # 辺 + # 面 = 2

証明 まず次の補題を示す.

補題. ある3角形分割があったとき,
それを細分したものも
\# 頂点 − # 辺 + # 面
の数は変らない.

証明. 与えられた分割を細分するには次の2通りのやり方がある.

①

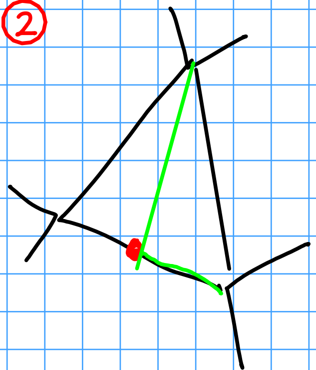


① 面の中に頂点を加える.

# 頂点	# 辺	# 面
+1	+3	+2

頂点 − # 辺 + # 面 は不変

②



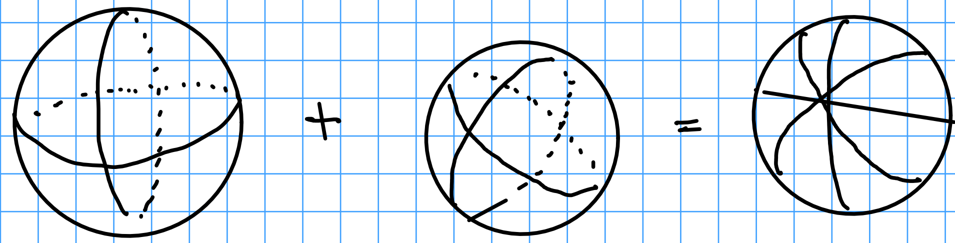
② 辺の中に頂点を加える.

# 頂点	# 辺	# 面
+1	+2	+1

頂点 − # 辺 + # 面 不変

Eulerの定理の証明 まず1つ3角形分割を固定する. もう1つ正四面体による分割を考える. すると, その2つの分割にあらわれる頂点全てをあわせた3角形分割があり

例



これはそれぞれの3角形分割の細分となっている. 一辺補題から細分によって

頂点 − # 辺 + # 面 は 不変

よって上の式の値は 2 となる.

・正多面体は5種類しかない.

正多面体 … 各面が合同, 正多角形
各頂点にあつまる面の数が
同じ.

正多面体の頂点 … λ 個
辺 … μ 本
面 … ν 枚

p … 1つの頂点にあつまる面の数
q … 面の辺の数

頂点の数を考えて $\nu q = p\lambda$
辺 〃 $\nu q = 2\mu$

さらに $\lambda - \mu + \nu = 2$ なので

$2\lambda - 2\mu + 2\nu = 2$

$2\lambda - \nu q + 2\nu = 4$ … ①

$2\lambda - p\lambda + 2\nu = 4$ … ②

辺々加えて

$(4-p)\lambda + (4-q)\nu = 8$

正

p or $q \leqq 3$

①×2 $4\lambda - 2\nu q + 4\nu = 8$

これに②を加えると

$(6-p)\lambda + 2(3-q)\nu = 12$

$q \geqq 3$ より $p \leqq 5$. 同様に $q \leqq 5$

$(p, q) = (3,3)\ (3,4)\ (4,3)\ (3,5)$
$(5,3)$

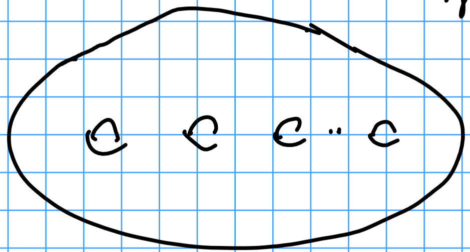
Euler数

定義　図形を3角形分割したとき

＃頂点 − ＃辺 ＋ ＃面

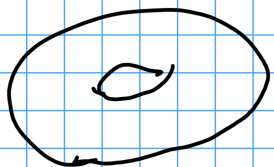
を Euler数と呼ぶ.

レポート問題



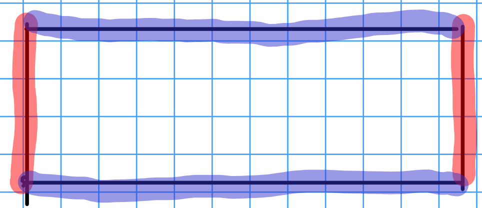
n人乗りのうきわのオイラー数を授業の定義に従って求めよ.

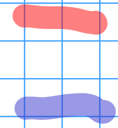
例



ドーナツのオイラー数を求めてみよう.

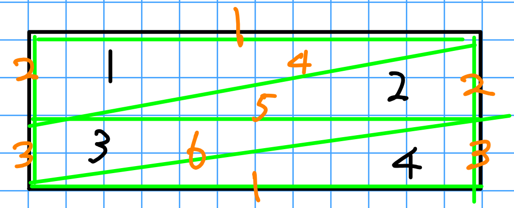
ドーナツは





貼りあわせる

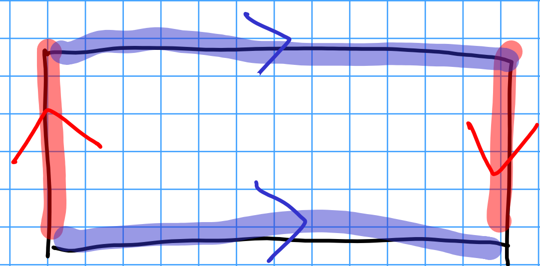
とできる.

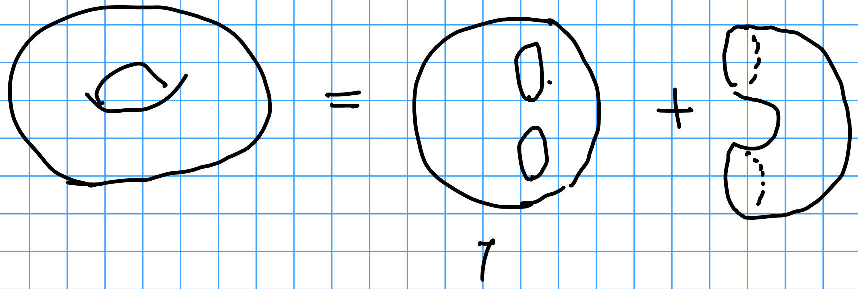


＃面	4
＃辺	6
＃頂点	2

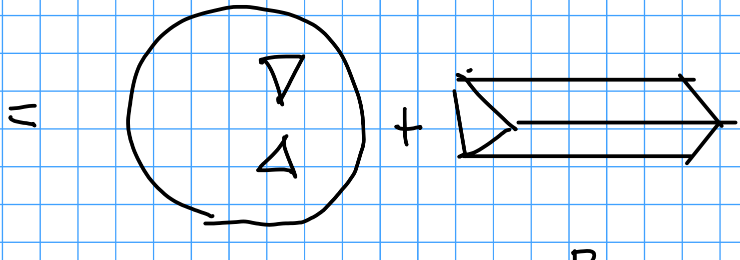
オイラー数は 0.

例　ドーナツのオイラー数を別のやり方で求めてみよう.





上の2つは穴

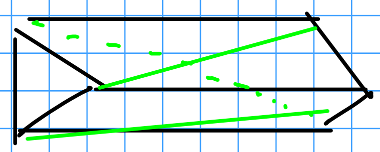


A　　　B

Aの3角形の穴を一部とする3角形分割を考える。この分割に対して

$\#$頂点 $-$ $\#$辺 $+$ $\#$面 $= 2 - 2 = 0$

Bを



と分割すると

$\#$頂点 $-$ $\#$辺 $+$ $\#$面 $= 6-12+8=2$

貼りあわせた図形は面が2つ消えるので

オイラー数は 0。

レポートの〆切りは 6/10(水) 5限