

問題 1. (10 min.) 漸化式

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$$

を満す数列 a_n の集合 V は \mathbb{C} 上のベクトル空間の構造を持つことを示せ.

問題 2. (10 min.) ベクトル $(1, 0, 1)$ で生成されるベクトル空間を W_1 , $(0, 1, 0)$ で生成されるベクトル空間を W_2 とする. $W_1 + W_2$ はどのような空間になるか記述せよ.

問題 3. (30 min.)

- (1) ベクトル空間 W とその部分ベクトル空間 W_1, W_2, W_3 が与えられたとする.

$$\dim W = \dim W_1 + \dim W_2 + \dim W_3, \quad W = W_1 + W_2 + W_3$$

が成立するとき, W のすべての元は W_1, W_2, W_3 の元を用いて一意的にあらわせることを示せ. ただし,

$$W_1 + W_2 + W_3 := \{v = w_1 + w_2 + w_3 \mid w_i \in W_i\}$$

である.

- (2) より一般にベクトル空間 W とその部分ベクトル空間 $W_i, (1 \leq i \leq n)$ で

$$\dim W = \sum_{i=1}^n \dim W_i$$

を満すものが与えられたとき, W の任意の元は W_i の元を用いて一意的にあらわせることを示せ.