

基礎数学 A Oct. 1. 宿題

問題 1. (10 min.) 集合

$$\mathbb{F}_5 := \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

に次のように和と積を定める.

$$\begin{aligned} a + b &:= \{ a + b \text{ を } 5 \text{ で割った余り} \}, \\ a \cdot b &:= \{ a \cdot b \text{ を } 5 \text{ で割った余り} \}. \end{aligned}$$

このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) $4 + 4$ および $4 \cdot 4$ を計算せよ.
- (2) \mathbb{F}_5 の 0 以外の元に対し, 積に関する逆元が存在することを示せ.

問題 2. (10 min.) 自然数 $n, m, (n > m)$ を固定する. 次の連立方程式を考える.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nm} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

この方程式の解の集合がベクトル空間の構造を持つことを示せ.

問題 3. (20 min.) $\mathbb{Q}[x, y]$ で x, y を変数とする有理数を係数とする多項式の集合を表す. 次の集合を考える.

$$\mathbb{Q}[x, y]_{\leq n} := \{f(x, y) \in \mathbb{Q}[x, y]; f(x, y) \text{ の次数は } n \text{ 以下} \}$$

この集合がベクトル空間の構造を持つこと, またその次数を求めよ.