

問題 1. (5 min.)

- (1) 整数の集合 \mathbb{Z} に対し対応

$$\mathbb{Z} \ni n \mapsto 2n \in \mathbb{Z}$$

を考える. これは写像かどうか判定せよ.

- (2) 整数の集合 \mathbb{Z} に対し対応

$$\mathbb{Z} \ni n \mapsto \frac{1}{2}n \in \mathbb{Z}$$

を考える. これは写像かどうか判定せよ.

問題 2. (10 min.)

- (1) 複素数の集合 \mathbb{C} を実数 \mathbb{R} 上のベクトル空間と見なす. 複素数 α に対し, 写像を

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto \alpha z \in \mathbb{C}$$

と定める. これは線形写像かどうか判定せよ.

- (2) p を素数とし, \mathbb{F}_p を自然数を p で割った余りの集合とし, 積, 和を

$$\begin{aligned} a + b &:= a + b \text{ を } p \text{ で割った余り.} \\ ab &:= ab \text{ を } p \text{ で割った余り.} \end{aligned}$$

と定める. \mathbb{F}_p から \mathbb{F}_p への写像を

$$\mathbb{F}_p \ni x \mapsto x^p \in \mathbb{F}_p$$

と定義する. これが線形写像であることを示せ.

問題 3. (10 min.) \mathbb{R}^3 から \mathbb{R}^3 への線型写像を

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

と定める. この写像の核と像を求めよ.

問題 4. (10 min) 三次以下の有理係数多項式の集合を $\mathbb{Q}[x]_{\leq 3}$ で表す. $\mathbb{Q}[x]_{\leq 3}$ から $\mathbb{Q}[x]_{\leq 3}$ への線型写像を

$$\mathbb{Q}[x]_{\leq 3} \ni f(x) \mapsto f'(x) \in \mathbb{Q}[x]_{\leq 3}$$

と定義する. この写像の核と像を求めよ.