基礎数学 A 確認テスト – このテストは成績に関係ありません – Oct. 1.

問題 1.　次の連立方程式を解け.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

解.　行列 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ を標準形に直して考える

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad (1行 + 3行)$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 2行 + 1行 \\ 3行 + 1行 \end{matrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 2行と3行の入れかえ.$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 2行 \times \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 1行 + 2 \times (2行)$$

※ 行の操作のやり方は色々ある. 各自やりやすい方法を取ると良い.

元の方程式の解は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の解なので

$x_1 = x_3 - x_4$

$x_2 = x_3$

$x_3 = a \quad x_4 = b$ とおけば

$(x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4) = (a-b, a, a, b)$

$x_1 = a \quad x_2 = b$ とけば

$(x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4) = (a, b, b, b-a)$

問題 2. 次のベクトルの集合は一次独立（線形独立）か？

$$\{(2,-1,-1),\quad (-1,2,-1),\quad (-1,-1,2),\quad (2,-1,-1)\}$$

線形独立の定義は次のようなものであった

$\{v_1 \cdots v_n\}$ が 線形独立（線形従属）とは

$t_1v_1 + \cdots + t_nv_n = 0$ をみたす 全て 0でない t_i $(1 \leq i \leq n)$

が存在しない（存在する.）

問題1 より

$$0\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

となることがわかるので この ベクトルの集合は 線形従属

線形独立でない.

問題 3. 次の行列の固有値と, その固有値を持つ固有ベクトルを一つ求めよ.

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & 4\end{pmatrix}$$

行列式 この授業では det で 統一.

まず $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & 4\end{pmatrix}$ に対して $\det(xE-A) = 0$ を考える.

$|xE-A|$

$\Delta(xE-A)$

$$\det\left(\begin{pmatrix}x & 0\\0 & x\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & 4\end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix}x-1 & -2\\1 & x-4\end{pmatrix}$$

$$= (x-1)(x-4) - (-2)\times 1$$

$$= x^2 - 5x + 4 + 2 = x^2 - 5x + 6 = 0$$

上の方程式を解くと, $x = 2$ 又は 3 よって 固有値は 2 又は 3.

固有値 2の 固有ベクトルは 2 $\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -2\\1 & -2\end{pmatrix}$

とかけて $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ になるベクトル なので. その1つとして $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

同じく 3 〃 $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$