

基礎数学 A Nov. 19. 課題

問題 1. (10 min.) 漸化式

$$a_{n+2} = 6a_{n+1} - 5a_n$$

を満す数列を考える.

(1) この漸化式を満す数列の集合を V とする. V は \mathbb{C} 上のベクトル空間であることを示せ.

(2) V の次元と一組の基底を求めよ.

問題 2. (10 min.) 複素係数の三次以下の多項式の集合を V とする. V から V への線形写像 f を

$$V \ni f(x) \mapsto f'(x) \in V$$

と定める. f の基底 $\{1, x, x^2, x^3\}$ に関する表現行列と Jordan 標準形を求めよ.

問題 3. (10 min.) $m \times m$ 行列 A は常に以下のかたちに分解できる.

$$A = S + N, SN = NS \quad (S \text{ は半単純行列, } N \text{ は冪零行列})$$

このとき, ある行列 P が存在し,

$$P^{-1}SP = \begin{pmatrix} \alpha_1 E_1 & O & \cdots & O \\ O & \alpha_2 E_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & \alpha_n E_n \end{pmatrix} \quad P^{-1}NP = \begin{pmatrix} N_1 & O & \cdots & O \\ O & N_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & N_n \end{pmatrix}$$

と出来ることを示せ. ただし,

$$N_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

である.