

基礎数学 A Nov. 16 補足資料

N を $m \times m$ 行列で, $N^l = O$ と仮定する. このとき, ある行列 P があり,

$$P^{-1}NP = \begin{pmatrix} N_1 & O & \cdots & O \\ O & N_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & N_n \end{pmatrix}, \quad N_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ (対角線の右上に } 1 \text{ が並ぶ.)}$$

と出来ることを示す. まず記号を準備する.

$$V_i := \{x \in \mathbb{R}^m; N^i x = 0\}$$

とし,

$$k_i := \dim V_i, \quad r_i := k_i - k_{i-1}$$

とする. まず

$$r_i \leq r_{i-1}$$

を示す. V_i の基底として, V_{i-1} の基底を延長したものを取り, V_{i-1} に含まれていないものを

$$\{v_1, \dots, v_{r_i}\}$$

とする. このとき, $Nv_i \in V_{i-1}$ であり, $Nv_i \notin V_{i-2}$. これから $r_i \leq r_{i-1}$ を得る. 次に \mathbb{R}^m の基底を以下のように選ぶ. まず $V_l = \mathbb{R}^m$ の基底として, V_{l-1} を延長したものを取り, V_{l-1} に含まれていないものを $\{v_{l,1}, \dots, v_{l,r_l}\}$ とする. 次に V_{l-1} の基底を V_{l-2} の基底を延長したものを取るのだが, 先に述べたように, $Nv_{li} \notin V_{l-2}$ なので, これらを基底の一部として含むように取ることにすると, 新しく $\{v_{l-1,1}, \dots, v_{l-1,r_l-r_{l-1}}\}$ が加わった基底が取れる. 以下これを繰り返すと, 最終的に \mathbb{R}^m の基底として,

$$\{N^{l-1}v_{l,1}, N^{l-2}v_{l,1}, \dots, v_{l,1}, N^{l-1}v_{l,2}, \dots, v_{l,2}, \dots, v_{l,r_l}, N^{l-2}v_{l-1,1}, \dots, v_{l-1,r_l-r_{l-1}}, \dots, v_{1,r_1}\}$$

が取れる. これをこの順番のまま並べたものを P とすれば $P^{-1}NP$ が望んだ形になる.