

問題 1. A を複素数を成分に持つ $n \times n$ 行列で $\det A \neq 0$ であるようなものとする. このとき,

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$$

であることを示せ.

問題 2.

(1) A を $n \times n$ Hermite 行列とする. すべての複素 n 次元ベクトル x に対し,

$${}^t x A \bar{x} = 0$$

であれば $A = O$ であることを示せ.

(2) A が正規行列であることと,

$$\langle Ax, Ax \rangle = \langle A^* x, A^* x \rangle$$

であることは同値であることを示せ. ただし, \langle, \rangle は Hermite 内積である.

問題 3. 複素 $n \times n$ 行列 H に対し, ある Hermite 行列 A と歪 Hermite 行列 B があり,

$$H = A + B$$

と書けることを示せ. 余力があれば, この表現が一意的であることも示せ.

特別問題 (解かなくてもよい)

$A_i, (1 \leq i \leq n)$ を Hermite 行列とする.

$$\sum_{i=1}^n A_i^2 = O$$

であればすべての A_i が零行列であることを示せ.