

基礎数学 A Dec. 3. 宿題 – 提出期限 Dec. 7. –

問題 1. (10 min.)  $m \times m$  行列の空間  $M$  に内積を次のように定義する.

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}({}^t AB)$$

$1 \leq k, l \leq m$  であるような整数  $k, l$  を固定し, 行列  $E_{kl}$  を  $(k, l)$ -成分のみが 1 その他が 0 であるような行列,  $C$  を  $(i, j)$  成分が  $c_{ij}$  となる行列とする. このとき,

$$\langle E_{kl}, C \rangle$$

を計算せよ.

問題 2. (20 min.) ベクトル空間  $V$  に内積  $\langle, \rangle$  が定義されており, この内積は  $V$  の 0 でない元  $\mathbf{a}$  に対し,

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \geq 0$$

を満すとする. このとき,  $V$  の元  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  に対し

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \cdot \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle \geq \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2$$

が成立することを示せ.