1/28　2/4 期末試験
課題提出期限　2/4 まで.
今日のキーワード　復習. テンソル積

前回の課題

1. $\forall x \in \mathbb{R}^n$ に対し　$Ax = Bx \Rightarrow A = B$　を示せ.

説明不十分な例.

$Ax = Bx \Leftrightarrow (A-B)x = 0$

$x$ は任意なので　$A-B=O$　よって　$A=B$

この部分の説明を書いて欲しかった.

$\forall x \in \mathbb{R}^n$ $Cx = 0$ とする.　$C$ の $(i,j)$ 成分を $c_{ij}$ とおく.

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$Cx = 0 \overset{\forall i}{\Leftrightarrow} \sum_{1 \le j \le n} c_{ij} x_j = 0$

$\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$

$x$ は任意なので,

$c_{ij}$ は全て $0$. つまり. $C = O$

又は, $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ← $i$ 番目 を取ると

$C \cdot x = \begin{pmatrix} c_{1i} \\ \vdots \\ c_{mi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow c_{ji} = 0 \quad 1 \le j \le m$

とすれば, より具体的にわかる.

※ 問題の中で「すべての…」とあったら,「ある特殊な…」について考えると良いことが多い.

2. $U$ unitary　$U = (u_1 \cdots u_n)$
↑ 列ベクトル

$\{u_1 \cdots u_n\}$ が正規直交基底であることを示せ.

解) $U^*U$ の $(i,j)$ 成分 は　$u_i^* u_j = {}^t\overline{u_i} \cdot u_j = \langle u_i, u_j \rangle$

$U^*U = E$ より　$\langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 0 & i \ne j \\ 1 & i = j \end{cases}$

3. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ のスペクトル分解を求めよ.

解) より一般に　$A$ 正規のスペクトル分解がどのように与えられるかについて述べる.

$\varphi_A(x) = A$ の最小多項式
$= (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)$　※ $\alpha_i$ は互いに異なる

$f_i(x) = \varphi_A(x) / x - \alpha_i$

G.C.D. $\{f_i(x)\} = 1$ なので 多項式 $m_i(x)$ で

$\sum m_i(x) f_i(x) = 1$

となるものがある.　$A_i = m_i(A) f_i(A)$ とおけばよい.

この問題の場合

$$\varphi_A(x) = (x-5)(x-2)$$

$$f_1(x) = x-2 \qquad f_2(x) = x-5$$

$$m_1(x) = \frac{1}{3} \qquad m_2(x) = -\frac{1}{3}$$

$$A_1 = \frac{1}{3}(A-2E) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = -\frac{1}{3}(A-5E) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

具体例で確認したあとで、$A_i$ がスペクトル分解になっていることを見る。これは以下の3点を示せば良い。

1) $\sum \alpha_i A_i = A$

2) $\sum A_i = E$

3) $A_i A_j = O \quad (i \neq j)$

2) $\sum m_i(x) f_i(x) = 1$ より $\underbrace{\sum m_i(A) f_i(A)}_{\sum A_i} = E$

3)
$$A_i A_j = m_i(A) f_i(A) m_j(A) f_j(A)$$
$$= m_i(A) m_j(A) f_i(A) f_j(A)$$

$f_i(x) f_j(x)$ は $\varphi_A(x)$ でわりきれるので

$$= O$$

1) $(x-\alpha_i) m_i(x) f_i(x) = m_i(x) \varphi_A(x)$ より

$$(A-\alpha_i E)\cdot A_i = m_i(A)\varphi_A(A) = O$$

よって $A \cdot A_i = \alpha_i A_i$

$$A = A\cdot E = A\cdot\left(\sum A_i\right)$$
$$= \sum \alpha_i A_i \quad //$$

4. 次の議論はあやまり.

$X$ 正値 Hermite $\Rightarrow$ $\exists U$ unitary $U^* X U = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$

$\alpha_i > 0$

$\sqrt[n]{X} := U \begin{pmatrix} \sqrt[n]{\alpha_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt[n]{\alpha_m} \end{pmatrix} U^*$ は $X$ の $n$ 乗根の1つ.

$X$ の別の正値 Hermite な $n$ 乗根を $Y$ とすると,

$U^* Y U =$ 対角行列 $= \begin{pmatrix} \beta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_n \end{pmatrix}$

$U$ を適当にかけることで, $\begin{pmatrix} \sqrt[n]{\alpha_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt[n]{\alpha_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_n \end{pmatrix}$

$$\sqrt[n]{X} = Y$$

そこで次のようにする. $X = \sum \alpha_i X_i$ スペクトル分解

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt[n]{X} = \sum \sqrt[n]{\alpha_i} X_i \\ Y = \sum \beta_i Y_i \end{array}\right\}$$ というスペクトル分解をもつ.

双方 $n$ 乗すると $X = \sum \beta_i^n Y_i = \sum \alpha_i X_i$

スペクトル分解の一意性より, $\beta_i^n = \alpha_i \quad Y_i = X_i \Rightarrow \sqrt[n]{X} = Y$

# ・テンソル積の復習

定義　$U, V$ をベクトル空間とする。$U, V$ のテンソル積 $U\otimes V$ とはベクトル空間であり、双一次写像

$$f: U\times V \longrightarrow U\otimes V$$

があって、任意の双一次写像 $U\times V \to W$ に対し

$$\begin{tikzcd} U\times V \arrow[r, "g"] \arrow[d] & W \\ U\otimes V \arrow[ur, "\exists ! \rho"'] & \end{tikzcd} \qquad g = \rho\circ f$$

をみたす線型写像 $\rho$ が存在するもののことを言う。

※ $V$ の基底 $\{e_1 \cdots e_n\}$　$U$ の基底 $\{f_1 \cdots f_m\}$ とする。このとき、$V\otimes U$ の基底は $e_i\otimes f_j \left(\begin{matrix}1\le i\le n\\ 1\le j\le m\end{matrix}\right)$

特に $\dim(V\otimes U) = nm$.

Q　$\dim(\mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3) = 6$

※　$\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{C}$ ← 今まで見た中で一番次元の大きいベクトル空間

・$f: V \to W$　線型写像.
$f': V' \to W'$

$$\begin{tikzcd} V\times V' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, bend left] & W\times W' \arrow[d] \\ V\otimes V' \arrow[r, "\rho"] & W\otimes W' \end{tikzcd}$$

双一次写像.

$\rho = f\otimes f'$

$f, f'$ の表現行列 $A, B$ のとき $\rho$ の表現行列を $A\otimes B$

$V = V' = W = W' = \mathbb{R}^2$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$V, W$ の基底　$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$　$e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$V', W'$　〃　$f_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$　$f_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$　とおく.

$V\otimes V'$ の基底　$e_1\otimes f_1,\ e_2\otimes f_1\ \cdots$

$$\begin{aligned}(f\otimes f')(e_1\otimes f_1) &= f(e_1)\otimes f'(f_1) \\ &= (a_{11}e_1 + a_{21}e_2)\otimes(b_{11}f_1 + b_{21}f_2) \\ &= a_{11}b_{11}\, e_1\otimes f_1 + a_{11}b_{21}\, e_1\otimes f_2 \\ &\quad + a_{21}b_{11}\, e_2\otimes f_1 + a_{21}b_{21}\, e_2\otimes f_2\end{aligned}$$

※ 一般には

$$(f\otimes f')(e_i\otimes f_j) = \sum_{k,l} a_{ki}b_{lj}\, e_k\otimes f_l$$

よって　$\mathrm{tr}(A\otimes B) = \sum a_{ii}b_{jj} = \mathrm{tr}A\cdot\mathrm{tr}B$

又、上の※の式から

$$A\otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & & & \\ a_{n1}B & & & a_{nn}B \end{pmatrix}$$

$$\det(A\otimes B) = \det\begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ 0 & \left(a_{22}-\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}}\right)B & \cdots & \left(a_{2n}-\frac{a_{1n}a_{21}}{a_{11}}B\right) \\ a_{31}B & a_{32}B & \cdot & a_{3n}B \\ & & \ddots & \end{pmatrix}$$

$$= (\det A)^n (\det B)^n$$

$n = \{A の行の数\}$

$${}^t x A x = \langle {}^t A x, x\rangle = \langle -Ax, x\rangle$$
$${}^t({}^t A x)$$
$$= -{}^t x\, {}^t A\cdot x$$

$$\langle x, y\rangle = {}^t x\cdot y$$

$$\langle x, Ax\rangle = \langle Ax, x\rangle$$
$${}^t x A x \qquad {}^t x\, {}^t A x = -{}^t x A x$$
$${}^t x A x = -{}^t x A x$$

$f, f'$ の表現行列 $A, B$ のとき $\rho$ の表現行列を $A\otimes B$

$V = V' = W = W' = \mathbb{R}^2$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}$

$V, W$ の基底 $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$V', W'$ 〃 $f_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad f_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ とおく.

$V\otimes V'$ の基底 $e_1\otimes f_1,\ e_2\otimes f_1\ \cdots$

$$(f\otimes f')(e_1\otimes f_1) = f(e_1)\otimes f'(f_1)$$
$$= (a_{11}e_1 + a_{21}e_2)\otimes(b_{11}f_1 + b_{21}f_2)$$
$$= a_{11}b_{11}e_1\otimes f_1 + a_{11}b_{21}e_1\otimes f_2$$
$$+ a_{21}b_{11}e_2\otimes f_1 + a_{21}b_{21}e_2\otimes f_2$$

※ 一般には

$$(f\otimes f')(e_i\otimes f_j) = \sum_{k,l} a_{ki}b_{lj}\, e_k\otimes f_l$$

よって $\mathrm{tr}(A\otimes B) = \sum a_{ii}b_{jj} = \mathrm{tr}A\cdot\mathrm{tr}B.$

又. 上の※の式から

$$A\otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & & & \\ a_{n1}B & & & a_{nn}B\end{pmatrix}$$