1/21 今日のキーワード

- スペクトル分解
- 実正規行列の標準型

定義 A 正規行列 $(AA^* = A^*A)$

A の スペクトル分解 とは A の固有値を $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ としたとき、

$$A = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i \qquad A_i \ \text{Hermite}$$

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = E, \quad \cancel{A_i^2 = A_i} \quad A_iA_j = O \ (i \neq j)$$

上記の条件をみたす A_i たちのことを言う。

命題 A 正規行列に対し、スペクトル分解は存在して一意的。又 $AB = BA$ であれば B は A_i たちとも交換可能。

※ $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 正値 Hermite (固有値 4, 1)

$\frac{1}{3}(4E - A)$ 　 $\frac{1}{3}(A - E)$

$$A = 1 \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + 4 \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

命題の証明。　A を $m \times m$ 行列とする。

$$W_{\alpha_i} = \{ x \in \mathbb{C}^m \mid Ax = \alpha_i x \}$$

A は正規行列なので

$$\mathbb{C}^m = W_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus W_{\alpha_n} \qquad \underset{x}{W_{\alpha_i}} \perp \underset{x'}{W_{\alpha_j}} \ (i \neq j)$$

$$\langle x, x' \rangle = 0.$$

すなわち $x \in \mathbb{C}^m$ は

$$x = \sum x_i = x_1 + \cdots + x_n \qquad x_i \in W_{\alpha_i} \qquad \langle x_i, x_j \rangle = 0 \ (i \neq j)$$

と一意的にかけるということを意味する。

行列 A_i を $A_i x = x_i$ と定義する。

これは次の定義と同じ $\begin{cases} Ax = x & x \in W_{\alpha_i} \\ Ax = 0 & x \notin W_{\alpha_i} \end{cases}$

すると，A_i は Hermite となり．

$x \in \mathbb{C}^m$ に対し，

$$A_i A_j x = A_i x_j = 0 \Rightarrow A_i A_j = O \quad (i \neq j)$$

$x = x_1 + \cdots + x_n$ より

$$\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) x = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} A_i x_j \right) = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$= x$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} A_i = E$$

$x_i \in W_{\alpha_i}$ を取る．

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i\right) \cdot x_i = \alpha_i A_i x_i = \alpha_i x_i$$

$x = x_1 + \cdots + x_n$ より

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i\right) x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

一方 $\quad Ax = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i = A$

ここで証明を一時中断し，先の具体例の計算法を見る．

$$W_4 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$W_1 = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

$$\mathbb{C}^3 = W_4 \oplus W_1$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{x}_4 + \vec{x}_1 \quad \text{と一意的に分けられる．}$$

$$\vec{x}_4 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_1 = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

上の両辺と $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の内積を取れば

$$x + y + z = 3\alpha \qquad \alpha = \frac{1}{3}(x + y + z)$$

よって

$$A_4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(x+y+z) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y+z \\ x+y+z \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

証明の残りを行う.

$$A = \sum \alpha_i A_i \qquad \sum A_i = E, \quad A_i A_j = O \ (i \neq j)$$

$$= \sum \alpha_i B_i \qquad \sum B_i = E, \quad B_i B_j = O \ (i \neq j)$$

としたとき, $A_i = B_i$ を示す. まず

$$A B_i x = \left(\sum \alpha_i B_i\right) B_i x$$

$$= \alpha_i B_i x$$

よって $B_i x \in W_{\alpha_i} = \{ x \in \mathbb{C}^m \mid Ax = \alpha_i x \}$

これから $A_i B_j x = B_j x \quad (i = j)$

$$= O \qquad (i \neq j)$$

$$A_i B_i = B_i, \quad A_i B_j = O \quad (i \neq j)$$

$$A_i = A_i \cdot E = A_i \left(\sum_{j=1}^{n} B_j\right) = A_i B_i = B_i$$

最後に $AB = BA \Rightarrow A_i B = B A_i$ を示す.

$AB = BA$ より W_{α_i} は B-不変. すなわち

$\forall y \in W_{\alpha_i}$ に対し $By \in W_{\alpha_i}$

実際 $ABy = BAy = \alpha_i By$.

よって W_{α_i} の基底を列ベクトルとして並べた行列を P とすれば

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 E_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \alpha_n E_n \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} B_{11} & & O \\ & \ddots & \\ O & & B_{nn} \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}A_iP = \begin{pmatrix} O & & & O \\ & \ddots & & \\ & & E_i & \\ O & & & \ddots \; O \end{pmatrix}$$

上の形から $A_i B = B A_i$ がわかる.

- 実正規行列の標準型

A 実正規行列 $(A {}^tA = {}^tA A, \ A = \overline{A})$

に対し 直交行列 P があり

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \alpha_n & & & & \\ & & & \beta_1 & \gamma_1 & & \\ & & & -\gamma_1 & \beta_1 & & \\ & & & & & \beta_2 & \gamma_2 \\ & & & & & -\gamma_2 & \beta_2 \\ & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

α_i Aの実の固有値

$\beta_j + i\gamma_j$

Aの複素の固有値

Q. Aが直交行列のとき 上の形は具体的にどうなるか?

証明の前に 対称行列の対角化について思い出してみよう。 $A={}^tA$ のとき Aの固有値は全て実数であり 異なる固有値に対応する固有ベクトルは直交するのであった。

$$(\alpha\langle x,y\rangle = \langle \alpha x, y\rangle = \langle Ax,y\rangle = \langle x, {}^tAy\rangle$$
$$= \langle x, Ay\rangle = \beta\langle x,y\rangle)$$

よって Aの固有値が全て異なるとすると、固有ベクトルは互いに直交する。このとき、各固有ベクトルの長さを1にそろえれば、固有ベクトルの集合は正規直交基底となり、それを列ベクトルにもつ行列Pは直交行列。又

$$P^{-1}AP = (\text{対角行列})$$

A: 正規の場合,

Aの実の固有値 α_i $(1\le i\le n)$

複素の 〃 $\beta_j + i\gamma_j$ $(1\le j\le m)$

対応する固有ベクトルを

$$\alpha_i \to x_i$$
$$\beta_j+i\gamma_j \to y_j = \cancel{u_j + iv_j}$$

で $\|x_i\|=\|y_j\|=1$　$\langle x_i,y_j\rangle=0$

$\langle x_i,x_j\rangle=\langle y_i,y_j\rangle=0$ $(i\ne j)$

となるものが取れる。

$$u_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_j+\overline{y_j})$$
$$v_j = \frac{1}{\sqrt{2}\,i}(y_j-\overline{y_j})$$

とすると、 x_i, u_j, v_j は正規直交基底をなす。これを並べたものをPとすれば

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \alpha_n & & & \\ & & & \beta_1 & \gamma_1 & \\ & & & -\gamma_1 & \beta_1 & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Qの解答例

A 直交行列のとき,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & & -1 & & & & & \\ & & & & & & \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & & & \\ & & & & & & -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & & & \\ & & & & & & & & \cos\theta_2 & \sin\theta_2 & \\ & & & & & & & & -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 & \\ & & & & & & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

となる.