前回の復習.

正規行列 A $n\times n$ 行列 は

$$AA^* = A^*A \qquad A^* = {}^t\bar{A}$$

をみたすとき, 正規行列という.

命題 A 正規行列 $\Leftrightarrow$ $\exists U$ unitary U^*AU: 対角

※ A が Hermite $A^* = A$

Unitary $U^*U = I$

複素数と行列の類似

行列	複素数
一般の行列	複素数
Hermite	実数
歪 Hermite	純虚数
Unitary	絶対値 1 の複素数
正値 Hermite	正の実数

A 歪 Hermite $\Leftrightarrow$ $A^* = -A$

Q. A 行列は Hermite 行列 B, C を用いて

$$A = B + iC$$

とかけることを示せ.

∵ $A = B + C'$ B Hermite C' 歪 Hermite

とかける. 定義より

$$(iC')^* = \bar{i}\cdot C'^* = -i(-C') = iC'$$

となり iC' は Hermite

$$A = B - i(iC')$$

とそれっぽい形にかける. 後は各自補うこと.

補題 A 正規

$\Leftrightarrow$ $A = B + iC$ B, C Hermite

B と C が交換可能.

∵ $A^* = B^* + (iC)^* = B - iC$

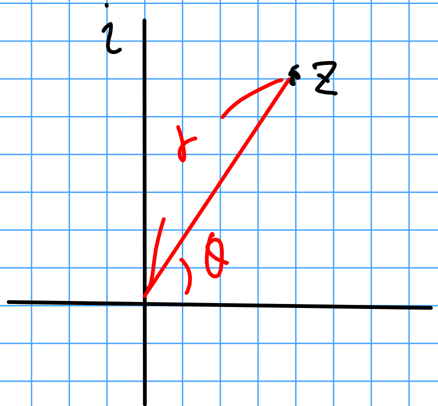
$$AA^* = (B+iC)(B-iC) = B^2 + C^2 + i(-BC + CB)$$

$$A^*A = (B-iC)(B+iC) = B^2 + C^2 + i(BC - CB)$$

よって $AA^* = A^*A \Leftrightarrow 2BC = 2CB$

Q　A 行列　$\det A \neq 0$.

このとき　$A = UH$ とかける.　H 正値 Hermitian
U unitary.



$z = r\cdot e^{i\theta}$
$r > 0$
$|e^{i\theta}| = 1$

∵ z 複素数に対し

$$e^{i\theta} = \frac{z}{|z|} = z/\sqrt{z\bar{z}}$$

この式を見ながら考える.

A^*A 正値 Hermite

$\exists U$ unitary

$$UA^*AU^* = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

$\alpha_i > 0$

$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\alpha_n} \end{pmatrix}$$ とする.

$$A^*A = U^*D^2U = (U^*DU)^2$$

$U_1 = A(U^*DU)^{-1}$ を考える.

$$U_1U_1^* = AU^*D^{-1}U(U^*D^{-1}U)A^*$$
$$= A(U^*D^{-1}U)^2A^*$$
$$= A(A^*A)^{-1}A^* = AA^{-1}A^{*-1}A^* = E$$

となり　$A(U^*DU)^{-1}$ は unitary

正値 Hermite ⇐ H とおく.

よって　$A = UH$ とかける.

補題　A　$\det A \neq 0$

A 正規 ⟺ $A = UH$ の U と H が可換

∵ (⇐) 仮定より　$A = UH = HU$

$$AA^* = UH(UH)^* = UHH^*U^* = UH^2U^* = H^2UU^* = H^2$$
$$A^*A = (UH)^*UH = H^*U^*UH = H^*H = H^2$$

⇒　$A = UH$　A 正規とする.

$$AA^* = UH^2U^* = H^2 = A^*A$$

より　$UH^2 = H^2U$

Q.　A と B^2 が可換 つまり　$AB^2 = B^2A$ とする.
$AB \neq BA$ なる例をつくれ.

補足（後で示す）

A 正値 Hermite　$A^nB=BA^n$ とする.

⇒　$AB=BA$.

これを使えば　$UH^2=H^2U$ より　$HU=UH$

今日のキーワード.　スペクトル分解

命題.　A 正規 ⇔ $\exists U$ unitary　$UAU^*=$(対角)

この命題は次のようにいいかえることができる.

※ A の相異なる固有値を $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ とする.

$W_{\alpha_1}=\{x\in\mathbb{C}^m \mid Ax=\alpha_1 x\}$ であれば

$W_{\alpha_i}\perp W_{\alpha_j}$　　$\mathbb{C}^m=W_{\alpha_1}\oplus\cdots\oplus W_{\alpha_n}$

※ ⇒（命題の ⇒）だけ解説する.

定義から　$AW_{\alpha_i}\subset W_{\alpha_i}$　すなわち A-不変.

よって W_{α_i} たちから $\mathbb{C}^m$ の基底を作り，それを

列ベクトルとしてもつ行列 P を考えれば

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\alpha_1E & & O\\ & \ddots & \\ O & & \alpha_nE\end{pmatrix}$$

今，$W_{\alpha_i}\perp W_{\alpha_j}$ なので　W_{α_i} たちから取った基底は

正規直交基底 に取れる. すると それを並べた行列

（U とする.）は unitary となる.

定義　A 正規行列 に対し　A のスペクトル分解とは

A の相異なる固有値を $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ としたとき,

$A=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i A_i$　　A_i : Hermite

$\sum_{i=1}^{n} A_i = E$　　$A_iA_j=O$　$(i\neq j)$

と ~~表示にかける.~~ かけることを言う.

命題　A 正規行列 は スペクトル分解をもつ.

又，この分解は一意的. さらに AとBが可換

ならば,　A_i と B も可換.

補題の証明.

A 正値 Hermitian $\Rightarrow$ A は正規
Aの固有値は全て正

$$A^n = \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i A_i\right)^n \quad (\alpha_1 \cdots \alpha_m は相異なる固有値)$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^n A_i$$

A^nの固有値は α_i^n $(1 \leq i \leq m)$ なので,

$A^n = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^n A_i$ は A^nのスペクトル分解

よって A_i と B は可換.

$A = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A$ より $AB = BA$.

※ この考え方を使うと A 正規に関して

A^n, $A^{1/m}$ が表せる.

今回はスペクトル分解の証明に必要な補題を1つ述べて終りにする.

補題 $\mathbb{C}^m \supset V$ 部分空間

$\mathbb{C}^m = V \oplus V^\perp$ と直和分解したとき

$$\begin{array}{c}\mathbb{C}^m \\ \rotatebox{90}{$\in$} \\ x \mapsto (x_1 + x_2)\end{array}$$

写像 $x \mapsto x_1$ は線型写像であり,

その表現行列 A は次の性質をもつ.

A Hermite かつ $A^2 = A$

∵ Aの性質だけ見る.

$x \in \mathbb{C}^m$ に対して $x = x_1 + x_2$ とすると

$A^2 x = A(Ax) = Ax_1 = x_1$ ($x_1 \in V$ より)

$Ax = x_1$

$A^2 = A$

? $x, y \in \mathbb{C}^m$ に対して

$x = x_1 + x_2$ $y = y_1 + y_2$ とおけば

$\langle Ax, y \rangle = \langle x_1, y_1 + y_2 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle$

$\langle A^* x, y \rangle = \langle x, Ay \rangle = \langle x_1 + x_2, y_1 \rangle$ 等しい

$= \langle x_1, y_1 \rangle$