1/7

・2/4(木) 期末試験

前回の課題

1. A 実数を成分とする $n\times n$ 行列

上半3角

Aの固有値は全て実数

このとき, ある直交行列 P があり $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} & * \\ 0 & \end{pmatrix}$

とできることを示す.

方法1. ある行列 T ($\det T\neq 0$) があり

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix} & * \\ 0 & \end{pmatrix}$$ (Jordan標準型)

とできる. 又 T は ~~T = PF P直交 F 3角~~

と分解できる. これを代入すると

$$F^{-1}P^{-1}APF=\begin{pmatrix} & * \\ 0 & \end{pmatrix}$$

F^{-1}, F は3角.

$$P^{-1}AP=F\begin{pmatrix} & * \\ 0 & \end{pmatrix}F^{-1}$$

3角行列の逆行列や積は又3角になるので

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} & * \\ 0 & \end{pmatrix}$$

方法2. 帰納法による.

$n=1$ のときは自明.

$n=k$ のときに成立すると仮定する.

A : $(k+1)\times(k+1)$ 行列とする.

α_1 : Aの固有値の1つ.

x_1 : α_1 を固有値にもつ固有ベクトル

x_1 を含む $\mathbb{R}^{k+1}$ の正規直交基底を

$\{x_1 \cdots x_{k+1}\}$ とする. P_1 を $x_1 \cdots x_{k+1}$ を

列ベクトルにもつ行列とすれば P_1 は直交行列

$$P_1^{-1}AP_1=\left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & a \\ 0 & \\ \vdots & A' \\ 0 & \end{array}\right)$$

a $1\times k$ 行列

A' $k\times k$ 行列

2~k+1列

ここで A' の固有方程式は Aの固有方程式を

$f_A(x)$ とすると

$$f_{A'}(x)=f_A(x)/(x-\alpha_1)$$

よって A'の固有値も全て実数．これから帰納法の仮定が使えて ある直交行列 P_2 があり

$$P_2^{-1}A'P_2 = \begin{pmatrix} & * \\ 0 & \end{pmatrix}$$

$P = P_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}$ とすれば $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} & * \\ 0 & \end{pmatrix}$ となる．

2. $\mathbb{R}^4$の 2次形式 $x_1x_2 - x_3x_4$ の符号を求める．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & & \\ \frac{1}{2} & 0 & & O \\ & & 0 & -\frac{1}{2} \\ O & & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$ とする．すると

$$x_1x_2 - x_3x_4 = (x_1\ x_2\ x_3\ x_4)A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

符号は A の固有値を計算すればよい．

$$\det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -\frac{1}{2} & & \\ -\frac{1}{2} & \lambda & & O \\ & & \lambda & \frac{1}{2} \\ O & & \frac{1}{2} & \lambda \end{vmatrix}$$

ここで $\det\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix} = \det A_{11} \cdot \det A_{22}$ より

$$\det(\lambda E - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \lambda \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} \lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \lambda \end{pmatrix}$$

$$= \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2$$

より 求める符号は $(2, 2, 0)$

今日のキーワード

正値性の判定，対称，交代行列の標準型

定義 A 実対称行列 が 正値 とは，任意の 0 でないベクトル x に対して

$${}^t x A x > 0$$

となる時を言う．

補題 A が正値 $\Longleftrightarrow$ Aの固有値が全て正

定義 A $n \times n$ 行列

Aの小対角行列 $\begin{pmatrix} a_{i_1i_1} & \cdots & a_{i_1i_k} \\ & a_{i_2i_2} & \\ a_{i_ki_1} & \cdots & a_{i_ki_k} \end{pmatrix}$

小対角小行列式　上の行列の行列式

補題 Aを正値な実対称行列とする。このとき、

$$\det A > 0.$$

(証) $A = {}^tBB$ B 実行列と書ける

$$\det A = \det({}^tB)\det B = (\det B)^2 > 0.$$

命題 $A^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1k} \\ & \ddots & \\ a_{k1} & & a_{kk} \end{pmatrix}$ とする。

$\det A^{(k)} > 0$ $(1 \leq k \leq n)$ のとき、

Aは正値。

(証) $n=1$のときは自明。

$n=k$ のときを仮定する。

$$A = \begin{pmatrix} A^{(k)} & a \\ {}^ta & a_{k+1\,k+1} \end{pmatrix}$$ とする。このとき、

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} E & 0 \\ {}^ta(A^{(k)})^{-1} & 1 \end{pmatrix}}_{{}^tP\ とおく.} \begin{pmatrix} A^{(k)} & \\ & a_{k+1\,k+1} - {}^ta A^{(k)^{-1}} a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E & A^{(k)-1}a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

※本来は $\det A^{(k)} = 0$ の場合を別に考える必要がある。

~~帰納法~~ 命題の仮定より

$$\det A^{(k)} > 0 \quad ヌ \quad \det A > 0$$

よって

$$\det A = \det A^{(k)} \cdot \Big(\underbrace{a_{k+1\,k+1} - {}^ta A^{(k)^{-1}} a}_{a_2\ とおく.}\Big) > 0$$

$${}^txAx = {}^tx\,{}^tP \begin{pmatrix} A^{(k)} & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} Px$$

$$Px = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ y \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow 1\sim k\text{行目} \\ \quad k+1\text{行目} \end{array}$$ とおけば

$${}^txAx = {}^t\boldsymbol{y}A^{(k)}\boldsymbol{y} + y a_2 y$$

帰納法の仮定より、${}^t\boldsymbol{y} A^{(k)} \boldsymbol{y} > 0$

$$y a_2 y = a_2 y^2 \geq 0$$

よって ${}^txAx > 0$ //

対称行列の標準型

命題 A 対称行列とする。このとき、ある行列 P があり

$$ {}^tPAP = (\text{対角行列}) $$

∵ Aのサイズの帰納法による。

A : 1×1 のとき 自明

A : $k\times k$ のとき、成立するとする。このとき

$$ A : k+1 \times k+1 = \begin{pmatrix} A^{(k)} & a \\ {}^ta & a \end{pmatrix} $$

$$ A = \underbrace{\begin{pmatrix} E & 0 \\ {}^taA^{(k)-1} & 1 \end{pmatrix}}_{{}^tP_1} \begin{pmatrix} A^{(k)} & 0 \\ 0 & a - {}^taA^{(k)-1}a \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} E & A^{(k)-1}a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P_1} $$

$$ = {}^tP_1 \begin{pmatrix} A^{(k)} & 0 \\ 0 & a' \end{pmatrix} P_1 $$

帰納法の仮定から、${}^tP_2A^{(k)}P_2 = (\text{対角行列})$

$P = P_1^{-1}\begin{pmatrix} P_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと、

$$ {}^tPAP = \begin{pmatrix} {}^tP_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} {}^tP_1 A P_1^{-1} \begin{pmatrix} P_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} $$

$$ = \begin{pmatrix} {}^tP_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{(k)} & 0 \\ 0 & a' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} $$

$$ = \begin{pmatrix} {}^tP_2A^{(k)}P_2 & 0 \\ 0 & a' \end{pmatrix} = (\text{対角行列}) $$

交代行列の標準型

A を ${}^tA = -A$ なる行列とする。このとき、ある P があり

$$ {}^tPAP = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & & 0 \\ & \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix} $$

※ この形から A 交代行列 $\det A \neq 0$ とすると

Aの行，列は必ず偶数となる。

まず $\langle Ax, y\rangle = \langle x, -Ay\rangle$ に注意する.

$${}^tAy$$

これから ${}^t x A x = 0.$ $(x \neq 0,\ Ax \neq 0)$

次に ${}^t x A y \neq 0$ となる y を取る.

$$y \rightsquigarrow \frac{1}{{}^t x A y}\, y$$

とおきかえて ${}^t x A y = 1$ として良い.

この x, y から基底を作り, それを列ベクトルとして並べたものを P とする.

${}^tPAP = (b_{ij})$ とおけば $b_{ij} = {}^t x_i A x_j$

ただし x_i, x_j は P の i列, j列

よって

$${}^tPAP = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & * \\ -1 & 0 & \\ \hline * & & * \end{array}\right)$$

一般に対称行列

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_{12} \\ {}^tA_{12} & A_2 \end{pmatrix}$$

において $\det A_{11} \neq 0$ ならば

$$A = \begin{pmatrix} E & O \\ {}^tA_{12}A_1^{-1} & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 - {}^tA_{12}A_1^{-1}A_{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & A_1^{-1}A_{12} \\ O & E \end{pmatrix}$$

である. これを適宜利用すれば交代行列の標準型を得る.