12/24

前回の課題

2. V ベクトル空間　$\dim V = \infty$ の場合

$\cup$

W 部分ベクトル空間

$(W^\perp)^\perp \neq W$ となる例がある.

例　$V = \{[0,1]$ の連続関数$\}$

$W = \{$多項式の集合$\}$

内積 $\langle , \rangle$ を $\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$

で与えた場合,

$(W^\perp)^\perp = V \neq W$

3. べき零な対称行列は O に限ること, を示せ.

誤答. べき零な対称行列 A とする.

$\exists n$　$A^n = O$　$A^{n-1} \neq O$ なる n

$n > 1$ として矛盾を示す.

$A^n = A \cdot A^{n-1} = {}^tA \cdot A^{n-1} = O$

$A^{n-1} \neq O$ より ${}^tA = O$ でなければならない.

$\shortparallel$

A となり矛盾

解答例 1.

A をべき零な対称行列とする. このとき, ある行列

P があり

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_m \end{pmatrix}$ ← 対角行列

とできる. 又ある n があり $A^n = O$. よって

$O = P^{-1}A^nP = (P^{-1}AP)^n = \begin{pmatrix} \alpha_1^n & & O \\ & \ddots & \\ O & & \alpha_m^n \end{pmatrix}$

よって $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$ となり

$P^{-1}AP = O \iff A = O$

解答例 その2

その1と同じ記号を使う.

行列 B, C に対して その内積を

$$\langle B, C\rangle = \mathrm{tr}({}^tBC)$$

と定める. すると, $\langle A, A\rangle = 0 \iff A = O$

さて Aの Jordan 標準形を A' とすると

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

A'もべき零なので 対角線の所は全て 0.

よって

$$A'^2 = P^{-1}A^2P = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

も対角線は全て 0.

$$\langle A, A\rangle = \mathrm{tr}(A^2) = \mathrm{tr}(P^{-1}A^2P) = 0$$

今日のキーワード　Unitary 行列と Hermite 行列

2次形式

n変数 2次式で 1次の項がないもの.

定義　2次形式 q に対して ある対称行列 A が定まる. q の 符号 とは 3つ組の自然数

(# 正の~~個~~固有値, # 0の固有値, # 負の固有値)

のこと.

定義　2次形式 q が 正値 とは Aの固有値が全て正のときを言う. 負値, 半正値, 半負値 も同様に定める.

さて 2次形式 q が与えられ 対応する対称行列が A だったとする. このとき, 直交行列 P を用いて

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \alpha_n & & & & & & \\ & & & \beta_1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \beta_m & & & \\ & & & & & & \gamma_1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \gamma_l \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \alpha_i > 0 \\ \beta_j < 0 \\ \gamma_1 = \cdots = \gamma_l = 0 \end{array}$$

と対角化できる.

ここで基底を

$$(x_1 \cdots x_{n+m+l}) \longmapsto \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}x_1, \cdots, \frac{1}{\sqrt{-\beta_m}}x_{n+m}, x_{n+m+1} \cdots x_{n+m+l}\right)$$

と取りかえると、q に対応する対称行列は

$$^{t}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} {}^{t}P^{-1}AP \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

と変換される（転置になっていることに注意）

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & O & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & O & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

特に 2変数の場合

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 正値の場合　$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

に対応する2次形式は

x^2+y^2　　x^2-y^2

円の方程式の一部　　双曲線

課題訂正

$x^2+4xy+2y^2=1$

$x^2-4xy+5y^2=1$

補題　n次元ベクトル空間 V の内積は n 変数正値

2次形式と1対1対応がある。

$\because$ V の基底 $\{v_1 \cdots v_n\}$ に対し $\langle , \rangle$ の表現行列

A が $A=(a_{ij})$ としたとき、

$$a_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$$

として定まる。内積の性質から $\forall v \in V$ ($v \neq 0$) に対し

$$\langle v, v \rangle > 0$$

Aは対称行列なのである直交行列Pがあり,

$$\underset{\overset{\shortparallel}{{}^tPAP}}{P^{-1}AP} = \begin{pmatrix}\alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n\end{pmatrix}$$

特に Vの元として $P\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$ ← Pの1列目.

として取れば

$$\left\langle P\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}, P\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}\right\rangle = (1\ 0 \cdots 0)\,{}^tPAP\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$$

$$= \alpha_1 > 0$$

同様の議論で $\alpha_2 \cdots \alpha_n > 0$ がわかる.

よってこのAを使って

$$q(x_1 \cdots x_n) = (x_1 \cdots x_n)\, A \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

とすれば正値な2次形式 q が得られる.

逆に正値な2次形式 q があれば正値な対称行列

Aが定まり, このAに対して

$$\langle x, y\rangle = {}^tx A y$$

とすると V の内積が定まる.

Q　A 正値実対称行列はある行列Pを用いて

$A = {}^tPP$ とかけることを示せ.

解. Aは実対称行列なので直交行列Qを用いて

$${}^tQAQ = \begin{pmatrix}\alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_m\end{pmatrix}$$ とかける.

Aは正値なので全ての $\alpha_i > 0$ よって

$$R = \begin{pmatrix}\sqrt{\alpha_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\alpha_m}\end{pmatrix}$$ とおけば

$${}^tQAQ = R^2 = {}^tRR$$

$$\Leftrightarrow A = Q\,{}^tR R\,{}^tQ$$

$P = R\,{}^tQ$ とおけばよい.

さて　$A = {}^tPP$　とかけたとする.

$P = T \cdot F$　　T　直交行列　F　上半3角

とできるので,

$A = {}^tP \cdot P = {}^t(T \cdot F)\, T \cdot F = {}^tF \cdot {}^tT \cdot T F$

$= {}^tF \cdot F$