12/21 期末 2010. Feb. 4 (予定)
新年 Jan. 7

基底の存在 ⇒ 正規直交基底が存在

これまでの流れ

内積 (Gram-Schmid の直交化)

Hermite 内積　内積が定義された空間の直和

今回のキーワード　対称行列の標準化

・内積の表現行列

ベクトル空間 V に内積 $\langle , \rangle$ が定義されている
とする. V の基底 $\{v_1 \cdots v_n\}$ に関する $\langle , \rangle$ の
表現行列とは $A = (a_{ij})$

$$a_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$$

※ 定義から

$$a_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle = \langle v_j, v_i \rangle = a_{ji}$$

同様に 複素ベクトル空間 $V_{\mathbb{C}}$ と Hermite内積
$\langle , \rangle_{\mathbb{C}}$ の基底 $\{v_1 \cdots v_n\}$ に関する表現行列

$$A_{\mathbb{C}} = (a_{ij}) \qquad a_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$$

※ 定義から

複素共役

$$a_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle = \overline{\langle v_j, v_i \rangle} = \overline{a_{ji}}$$

※ 行列 A で

$${}^tA = \overline{A}$$

をみたすものを Hermite 行列という.

さて V の元 x, y の基底 $\{v_1 \cdots v_n\}$ に関する座標

$$x = \sum x_i v_i \qquad y = \sum y_i v_i$$

を $(x_1 \cdots x_n)$, $(y_1 \cdots y_n)$ とすると,

$$\langle x, y \rangle = (x_1 \cdots x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

となる. ただし A は表現行列. これから

※ 以下は誤りを含むので, 後に別の解説をつけた.

~~補題 V ベクトル空間 $\langle , \rangle$ 内積 $x, y \in V$~~

$$\cancel{\langle Ax, y \rangle = \langle x, {}^tAy \rangle}$$

証明. V の基底を1つ $\{v_1 \cdots v_n\}$ を固定する.

x, y の座標を $(x_1 \cdots x_n), (y_1 \cdots y_n)$ とする.

又 $\langle\,,\,\rangle$ の表現行列を T とする.

E

$$\langle Ax, y\rangle = \left\langle A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right\rangle$$

$$= (x_1 \cdots x_n)\, {}^tA \cancel{T} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\cancel{= (y_1 \cdots y_n)\, {}^tT A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, {}^tA \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right\rangle$$

$$= \langle x, {}^tAy\rangle$$

ここで $T=E$ となるように $\{v_1 \cdots v_n\}$ をえらぶ.

命題 T を対称行列 $({}^tT = T)$ このとき, ある直交行列 P があり,

$${}^tPTP = (\text{対角行列})$$

※ 上の補題の中で V の基底 $\{v_1 \cdots v_n\}$ をうまく取れば $T = E$ とできると書いたが, これはまず V の基底を1つ固定した時点で対称行列 T' を得る.

命題より直交行列 P があり

$${}^tPT'P = (P^{-1}T'P =) \text{対角行列} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

このとき

$$\langle Pv_i, Pv_i\rangle = (0 \cdots 1 \cdots 0)\begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

i番目

i番目

$$= \alpha_i > 0$$

よって $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}} \end{pmatrix}$ とおけば

$$Q^{-1}\,{}^tPT'PQ = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

となる.

以下命題を示す.

証明（その1）　T のサイズの帰納法による。

1×1 のとき … 自明。

$n-1\times n-1$ のとき 命題が成立。すなわち

T'　$(n-1)\times(n-1)$ 対称行列に対しある直交

行列 P' があり、　${}^tP'T'P' =$（対角行列）

T　$n\times n$ 行列の固有値は全て実数。そのうちの

1つを α とし、対応する固有ベクトルを x とする。

$V = \mathbb{R}^n$ の x で張られる部分空間を W と

したとき、　$V = W \oplus W^{\perp}$

$$W^{\perp} = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x\rangle = 0 \}$$

すると　$y \in W^{\perp}$ の元に対し

T は対称

$$\langle Ty, x\rangle = \langle y, {}^tTx\rangle = \langle y, Tx\rangle$$

$$= \langle y, \alpha x\rangle = \alpha\langle y, x\rangle = 0$$

つまり　$TW \subset W$　　$T(W^{\perp}) \subset W^{\perp}$

よって　$W, W^{\perp}$ から基底を取ったものを P_1 とすれば

$$P_1^{-1}TP_1 = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \\ \hline 0 & \underbrace{T'}_{n-1\times n-1} \end{array}\right)$$

帰納法の仮定より　ある P'（直交行列）があり

${}^tP'T'P' =$（対角行列）

$$P_2 = P_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix}$$ とすると

$$P_2^{-1}TP_2 = \text{（対角行列）}$$ //

（その2）

$\det A \neq 0$ なる 実行列 A は

$A = PF$　　P 直交行列　　F 上半3角

と種の形に分解できる。 T に対しある行列 U

$(\det U \neq 0)$ があり

$$U^{-1}TU = \text{（上半3角）} = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

$U = PF$ と分解して代入すると、

$$F^{-1}P^{-1}TPF = \begin{pmatrix} \ddots & \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}TP = F\begin{pmatrix} \ddots & \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}F^{-1} = (\text{上半3角行列})$$

$\parallel$

${}^tPTP$ ← 対称行列

よって ${}^tPTP$ = (対角行列)

※ 以下も誤りなので後に注をつけました。

※ 授業の流れとは関係ないが

${}^t({}^tAB) = {}^tBA$ は A, B が正方行列でないと成立しない。

例 $A = (1\ 1)$ $B = (1\ 1)$

$${}^tA\cdot B = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}(1\ 1) = \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

$$A\cdot{}^tB = (1\ 1)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 2 \quad {}^t(A{}^tB)$$

・2次形式と符号

定義 n変数多項式で2次の項だけしかないものを2次形式という。

例 x^2, $x^2+y^2+z^2$, $x^2+y^2+z^2+w^2+2xy+2yz$

✗ x^2+1, $x^2+y^2+z^2+2xyz$

さて、2次形式 q は対称行列 A を用いて書き表すことができる。

例 $$(x\ y)\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = ax^2+2bxy+cy^2$$

$$(x\ y\ z)\begin{pmatrix}a&b&c\\ &d&e\\ & &f\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$= ax^2+dy^2+fz^2+2bxy+2cxz+2eyz$$

先の命題から 対称行列 T に対し ある直交行列 P があり

${}^tPTP$ = (対角行列)

定義 対称行列 T の符号とは

(# T の正の固有値, # T の負の固有値, # 0 〃)

※ 以下のように訂正します

補題. $V=\mathbb{R}^n$ に内積を

$$\langle x, y\rangle = {}^t x\cdot y = (x_1 \cdots x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$$

で定める. このとき $n\times n$ 行列 A とベクトル x, y に対し

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, {}^tAy\rangle$$

∵ 定義より

$$\langle Ax, y\rangle = {}^tx\,{}^tAy$$

$$\langle x, {}^tA\cdot y\rangle = {}^tx\cdot{}^tA\,y$$

となり, 両者は等しい.

注). $\mathbb{R}^n$ の内積は上のようなある意味"標準的な"ものばかりではなく, 例えば $\mathbb{R}^2$ に

$$\langle x, y\rangle = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

のように正値対称行列を使って定義されるものもあります. このような内積に関しては

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, {}^tAy\rangle$$

は必ずしも成立しません. 講義のときはこのあたりを解説するのを忘れました.

※ 以下のように訂正します.

A, B を $n\times m$ 行列とし, その内積を

$$\langle A, B\rangle_1 = \mathrm{tr}({}^tAB)$$

$$\langle A, B\rangle_2 = \mathrm{tr}({}^tB\cdot A)$$

と定めます. このとき $\langle A, B\rangle_1 = \langle A, B\rangle_2$ となりますが, これを以下のようにして示すことができます

$$\langle A, B\rangle_1 = \mathrm{tr}({}^tAB) = \mathrm{tr}({}^t({}^tAB))$$

$$= \mathrm{tr}({}^tB\cdot{}^t({}^tA)) = \mathrm{tr}({}^tB\cdot A) = \langle A, B\rangle_2$$