12/10

中間試験 問2 の表現行列 A は

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\6&-11&6\end{pmatrix} \quad \text{の他に} \quad \begin{pmatrix}0&0&6\\1&0&-11\\0&1&6\end{pmatrix}$$

などのように転置したものも正答となる可能性がある。

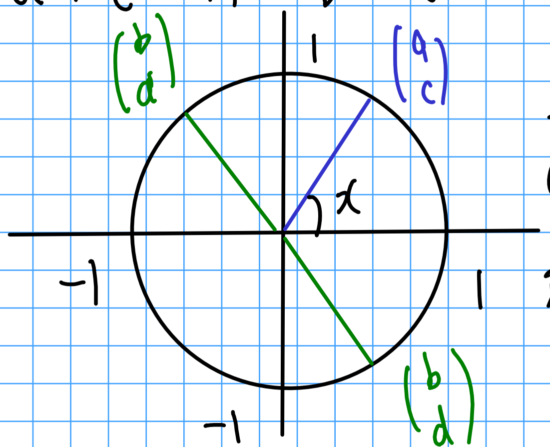
前回の課題 問3. $\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ とおくと

$${}^tAA=\begin{pmatrix}a^2+c^2 & \overset{ab+cd}{\cancel{ac+bd}}\\ \cancel{ac+bd} & b^2+d^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$ab+cd$

$a^2+c^2=1$, $b^2+d^2=1$, $\overset{ab+cd}{\cancel{ac+bd}}=\overset{0}{\cancel{1}}$



上の式より (a,c) (b,d) は左の円上の点

又 $(a,c)\perp(b,d)$

今回のキーワード

直交行列, 対称行列, Hermite 内積

問 A 直交行列すなわち ${}^tAA=E$ となるものとする。

このとき、Aの固有値の絶対値は1であることを示せ。

誤答. Aの固有値をα 固有ベクトルをxとする。

すると、$\langle Ax, Ax\rangle = \langle x, x\rangle$

$$\langle Ax, Ax\rangle = \langle \alpha x, \alpha x\rangle = \alpha^2\langle x, x\rangle$$

つまり $\alpha^2\langle x, x\rangle = \langle x, x\rangle$

$x\neq 0$ より $\alpha^2=1 \Rightarrow \alpha=\pm 1$

上の解答では $x\neq 0$ $\langle x, x\rangle\neq 0$ としているが

これは x が複素ベクトルのとき成立しない。

例 $\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}=1-1=0.$

定義（Hermite 内積）

複素ベクトル空間 V に 次下の ような 演算 $\langle , \rangle$ が

定義 されているとき，$\langle , \rangle$ を Hermite 内積という.

(1) $\langle a, b\rangle \in \mathbb{C}$

(2) $\langle a+b, c\rangle = \langle a, c\rangle + \langle b, d\rangle$

(3) $\lambda \in \mathbb{C}$ $\langle \lambda a, b\rangle = \lambda \langle a, b\rangle$

$\langle a, \lambda b\rangle = \bar{\lambda} \langle a, b\rangle$

(4) $\langle a, b\rangle = \overline{\langle b, a\rangle}$ （複素共役）

(5) $x \neq 0 \in V$ に対し $\langle x, x\rangle$ は 正の実数

例 $x, y \in \mathbb{C}^2$

$\langle x, y\rangle := {}^t x \cdot \bar{y}$

$x = y = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ に対して

$\langle x, y\rangle = (1 \ \ i) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = 1 + 1 = 2$

Hermite 内積を保つ 行列，すなわち

$\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$ を Hermite 行列という.

※ Hermite 内積 は x が 実ベクトルであるときは

普通の内積と同じである. よって

（直交行列）$\subset$（Hermite 行列）

問の解答例

$\langle Ax, Ax\rangle = \langle x, x\rangle$

$\parallel$

$\langle \alpha x, \alpha x\rangle = \alpha \cdot \bar{\alpha} \langle x, x\rangle = |\alpha|^2 \langle x, x\rangle$

$x \neq 0$ より $\langle x, x\rangle > 0$. よって $|\alpha|^2 = 1$.

問 A 実数 対称行列 の 固有値 は 実数であることを示せ.

解答例 α を Aの固有値. x を 固有ベクトルとする.

$\langle Ax, x\rangle = \langle x, \overline{{}^t A} x\rangle$

$\langle \alpha x, x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \langle x, \alpha x\rangle$

$\Leftrightarrow \alpha \langle x, x\rangle = \bar{\alpha} \langle x, x\rangle$

$\Leftrightarrow (\alpha - \bar{\alpha}) \langle x, x\rangle = 0$

$\langle x, x\rangle \neq 0$ より $\alpha = \bar{\alpha}$ すなわち $\alpha \in \mathbb{R}$

・ベクトル空間の直和分解

定義　V　内積(or Hermite 内積)が定義された
ベクトル空間.

W　部分ベクトル空間

$W^{\perp} := \{ x \in V \mid \forall y \in W \ \langle x, y \rangle = 0 \}$

perp

補題　$V = W \oplus W^{\perp}$

又 $W, W^{\perp}$ には V の内積を制限することで
自然に内積 $\langle \ \rangle_W$, $\langle \ \rangle_{W^{\perp}}$ が定まるが

$V \ni x = x_1 + x_2 \qquad x_1, y_1 \in W$

$ y = y_1 + y_2 \qquad x_2, y_2 \in W^{\perp}$

$\langle x, y \rangle \underset{直交}{=} \langle x_1, y_1 \rangle_W + \langle x_2, y_2 \rangle_{W^{\perp}}$

∵　W の基底を $\{ f_1 \cdots f_m \}$ とする.

$V \ni x$ に対し,

$$x_2 = x - \left\{ \frac{\langle x, f_1 \rangle}{\langle f_1, f_1 \rangle} f_1 + \cdots + \frac{\langle x, f_m \rangle}{\langle f_m, f_m \rangle} f_m \right\}$$

$$= x - \sum_{i=1}^{m} \frac{\langle x, f_i \rangle}{\langle f_i, f_i \rangle} f_i$$

とすると, $\langle x_2, f_i \rangle = 0$. つまり $x_2 \in W^{\perp}$

$x_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{\langle x, f_i \rangle}{\langle f_i, f_i \rangle} f_i$ とすれば　$x_1 \in W$

$x = x_1 + x_2$ となる. ここまでで $V = W + W^{\perp}$
がわかった. 又 $y \in W \cap W^{\perp}$ を取れば

$\langle y, y \rangle = 0 \Leftrightarrow y = 0.$

よって　$V = W \oplus W^{\perp}$

$$\langle x, y \rangle = \langle x_1 + x_2, y_1 + y_2 \rangle$$

$$= \langle x_1, y_1 \rangle + \underset{=0}{\langle x_1, y_2 \rangle} + \underset{=0}{\langle x_2, y_1 \rangle} + \langle x_2, y_2 \rangle$$

問 $V \supset W_1, W_2$ に対し

$(W_1 + W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$ を示せ.

$\because$ $(W_1 + W_2)^{\perp} \subset W_1^{\perp}$

$\subset W_2^{\perp}$

より $W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp} \supset (W_1 + W_2)^{\perp}$

逆に $x \in W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$ とすれば

$W_1 + W_2 \ni y_1 + y_2 \quad y_i \in W_i$

とかけるので

$$\langle x, y_1 + y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle$$
$$= 0.$$

すなわち $x \in (W_1 + W_2)^{\perp}$