12/7.

14, 17 は休講. 1/4 は休み.

2/1 or 2/4 に期末試験

今日のキーワード 直交変換, 正規直交基底

前回の課題

V ベクトル空間 $\langle , \rangle$ 内積

$a \in V$ に対して $\langle a, a\rangle \geqq 0$

となるものが与えられたとき,

$a, b \in V$ に対し $\langle a, a\rangle\langle b, b\rangle \geqq \langle a, b\rangle^2$

となることを示してもらった. これを用いて

$\langle a+b, a+b\rangle \cancel{\geqq} \leqq \{\langle a, a\rangle^{1/2} + \langle b, b\rangle^{1/2}\}^2$

が成立することを示す. 上の不等式は

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \langle a, a+b\rangle + \langle b, a+b\rangle \\
&= \langle a, a\rangle + \langle a, b\rangle + \langle b, a\rangle + \langle b, b\rangle \\
&= \langle a, a\rangle + \langle a, b\rangle + \langle a, b\rangle + \langle b, b\rangle \\
&= \langle a, a\rangle + 2\langle a, b\rangle + \langle b, b\rangle
\end{aligned}
$$

$$(\text{右辺}) = \langle a, a\rangle + 2\langle a, a\rangle^{1/2}\langle b, b\rangle^{1/2} + \langle b, b\rangle$$

◯ の部分は両辺同じ. 又, 課題から

$$2\langle a, b\rangle \leqq 2\langle a, a\rangle^{1/2}\langle b, b\rangle^{1/2}$$

となり成立. これは3角不等式と呼ばれるもので

$\langle a, a\rangle^{1/2} = \|a\|$ と書くことにすれば

$$\|a+b\| \leqq \|a\| + \|b\|$$

$\|a\|$ を a のノルムと言う. a が $\mathbb{R}^3$ や $\mathbb{R}^2$ の元

であるときは $\|a\| = (a$ の長さ$)$ である.

なお ベクトル空間 V に 内積 $\langle , \rangle$ で $\langle a, a\rangle \geqq 0$

となるものが定義されていれば V の各元 a を点と

見て a と b のキョリ $= \|a-b\| = \langle a-b, a-b\rangle^{1/2}$

とすれば キョリ空間となる.

- 正規直交基底.

定義 ベクトル空間 V に内積 $\langle , \rangle$ が定義されている

とする. V の基底 $\{v_1 \cdots v_n\}$ が正規直交基底とは,

$$\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

例　区間 $(-\pi, \pi)$ での連続関数を V，内積

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x)\, dx$$

の"基底"として $\left\{ \cos nx,\ \sin mx \;\middle|\; \begin{array}{l} n, m \\ 0\text{以上の整数} \end{array} \right\}$

が取れる。

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \{ \sin(m+n)x - \sin(m-n)x \} dx$$

$$= 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \{ \cos(m-n)x - \cos(m+n)x \} dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{m-n} \sin(m-n)x + \frac{1}{m+n} \sin(m+n)x \right]_0^{\pi}$$

$$= 0 \qquad (m \neq n)$$

のようにこの基底は互いに直交する。そこで

正規直交基底にするには，

$$\int_{-\pi}^{\pi} \alpha_m \sin^2 mx\, dx = 1$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \beta_n \cos^2 nx\, dx = 1$$

となるように α_m, β_n を定めてやれば良い

$$\int_{-\pi}^{\pi} \alpha_m \sin^2 mx\, dx = \frac{\alpha_m}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \{1 - \cos 2mx\} dx$$

$$= \frac{\alpha_m}{2} \left[x - \frac{1}{2m} \sin 2mx \right]_{-\pi}^{\pi} = \alpha_m \pi = 1$$

$\alpha_m = \frac{1}{\pi}$ とすれば良い。

参考　$x \in V$ は

$$x = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \cdot \sin mx$$

$x = \frac{\pi}{2}$ を代入すると

$$\frac{\pi}{2} = 2 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots \right)$$

積分

$$\frac{x^2}{2} = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^2} \cos mx$$

$$x = \frac{\pi}{2} \qquad \frac{\pi^2}{8} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} = \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \cdots \right)$$

Euler の公式

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum \frac{1}{m^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots$$

補題 内積 $\langle , \rangle$ が定義された(有限次元)ベクトル空間 V は正規直交基底を持つ.

☺ まず V には基底 $\{v_1 \cdots v_n\}$ が存在する.

$\{v_1 \cdots v_n\}$ から正規直交基底を以下のように構成する (Gram-Schmidtの直交化)

Step 1. $w_1 = v_1$

Step 2. $w_2 = v_2 - \dfrac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1$$

$\vdots$

$$w_n = v_n - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\langle v_n, w_j \rangle}{\langle w_j, w_j \rangle} w_j$$

すると w_i $(1 \leq i \leq n)$ は互いに直交. すなわち $\langle w_i, w_j \rangle = 0$ $(i \neq j)$ となる.

Step 4

$$v_i' := \frac{1}{\sqrt{\langle w_i, w_i \rangle}} w_i$$

とすると $\langle v_i', v_j' \rangle = \delta_{ij}$ となる

定義 内積 $\langle , \rangle$ が定義されたベクトル空間 V の間の線型写像 $f: V \to V$ が直交変換とは $a, b \in V$ に対し

$$\langle a, b \rangle = \langle f(a), f(b) \rangle$$

をみたすときを言う.

※ 少し弱く $\langle a, a \rangle = \langle f(a), f(a) \rangle$ a をみたすものを等長変換という.

直交変換の表現行列を直交行列という

※ 直交行列の性質

一般に内積が定義されたベクトル空間 V の間の線型写像 f の表現行列を A とするとき,

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, {}^tAy \rangle$$ が成立する.

直交変換では

$$\langle x, y\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = \langle x, {}^tAAy\rangle$$

よって $\langle x, y\rangle - \langle x, {}^tAAy\rangle = 0$

$\iff \langle x, (E - {}^tAA)y\rangle = 0$

x はどんなベクトルでも良いので

特に $x = (E - {}^tAA)y$ とすれば、

$$\langle (E - {}^tAA)y, (E - {}^tAA)y\rangle = 0.$$

$\iff (E - {}^tAA)y = 0$

$\iff E = {}^tAA$

※ A : $n \times n$ 行列. $\det A \neq 0$ とする.

このとき, A の各列を a_i とすると

$\{a_1 \cdots a_n\}$ は $\mathbb{R}^n$ の基底. Gram-Schmid の

方法から正規直交基底 $\{b_1 \cdots b_n\}$ が

$$b_i = \sum_{i \geq j \geq 1} c_{ij} a_j$$ と表せることがわかる.

b_i を列とする行列を B とすると

$$\underset{\text{直交行列}}{B} = A \underbrace{\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ & c_{22} \cdots & c_{2n} \\ O & & \ddots \\ & & c_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{上半3角}}$$

今 $\det A \neq 0$, $\det B \neq 0$ も行列式 $\neq 0$

上の上半3角の逆行列を F とすると

$$A = \underset{\text{直交}}{B} \cdot \underset{\text{上半3角}}{F}$$ 〜 岩澤分解