12/3. キーワード: 内積, 対称行列.

定義 ベクトル空間 V に次のような演算 $\langle\ ,\ \rangle$ が定義されているとき, $\langle\ ,\ \rangle$ を**内積**という.

1) $a, b \in V$ $\quad \langle a, b\rangle \in \mathbb{R}$

2) $\langle a+b, c\rangle = \langle a, c\rangle + \langle b, c\rangle$

3) $\langle a, b\rangle = \langle b, a\rangle$

4) $\langle \lambda a, b\rangle = \lambda\langle a, b\rangle \quad \lambda \in \mathbb{R}$

5) $a \in V \quad a \neq 0$ に対し
$\langle a, a\rangle > 0$

この条件は内積の定義に入れることも, 入れないこともある.

例 $V = \mathbb{R}^2$ $\quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in V$

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right\rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

※ 高校では $\vec{a}\cdot\vec{b}$ と書いたものと同じ.

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right\rangle = a_1 b_1 - a_2 b_2$$

としても内積の性質 1) ~ 4) をみたす.

実際 $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

$\langle a, b\rangle = a_1 b_1 - a_2 b_2$
$\langle b, a\rangle = b_1 a_1 - b_2 a_2$
等しい.

例 $V = M(n, \mathbb{R}) = \{$実数を成分とする $n \times n$ 行列$\}$

V はベクトル空間となる $A \in V$ に対し

$\mathrm{tr}(A) := \{A$ の対角線の成分の和$\}$

とし V の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を

$$\langle A, B\rangle := \mathrm{tr}(AB)$$

これが内積であることを確認する. 1) は自明.

tr の定義から $\mathrm{tr}(X+Y) = \mathrm{tr}(X) + \mathrm{tr}(Y)$

よって $\langle A+B, C\rangle = \mathrm{tr}((A+B)C)$
$= \mathrm{tr}(AC + BC)$
$= \mathrm{tr}(AC) + \mathrm{tr}(BC) = \langle A, C\rangle + \langle B, C\rangle$

3) $\langle A, B\rangle := \mathrm{tr}({}^t\!AB)$ ← 等しい.

$\langle B, A\rangle := \mathrm{tr}({}^t\!BA)$

※ 行列 A の固有多項式 $f_A(x)$ の x^{n-1} の係数は $-\mathrm{tr}(A)$ であり，行列 AB に対して

$f_{AB}(x) = f_{BA}(x)$

興味があれば検証してみると良い.

4) $\langle \lambda A, B\rangle := \mathrm{tr}(\lambda\, {}^t\!AB) = \lambda\, \mathrm{tr}({}^t\!AB)$

5) $\langle A, A\rangle := \mathrm{tr}({}^t\!AA)$ ただし $A = (a_{ij})$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2$$

a_{ij} は実数なので $A \neq O$ (零行列) ならば $\langle A, A\rangle > 0$.

例 $V = \{[0, 2\pi]$ 上の連続函数$\}$

実数値

$f(x), g(x) \in V$ に対し

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$$

は内積となる.

1) は自明.

2) $f(x), g(x), h(x) \in V$ に対し

$$\langle f(x)+g(x), h(x)\rangle = \int_0^{2\pi}\{f(x)+g(x)\}h(x)\,dx$$

$$\langle f(x), h(x)\rangle + \langle g(x), h(x)\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)h(x)\,dx + \int_0^{2\pi} g(x)h(x)\,dx$$

等しい.

3), 4) も上と同様，定義に戻って考えれば良い.

5) $\langle f(x), f(x)\rangle = \int_0^{2\pi}\{f(x)\}^2\,dx \geqq 0$

$= 0$ となるのは $f(x) \equiv 0$ のときのみ.

以下 内積の話を続けるが $\dim V = \infty$ の場合は基本的に扱わない.

定義 ベクトル空間 V と内積 $\langle\, ,\, \rangle$ に対し

$a, b \in V$ が直交する. $\Leftrightarrow$ $\langle a, b\rangle = 0$.

例 $a=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ $b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$

$\langle a,b\rangle = a_1b_1+a_2b_2=0$ ならば

幾何的な意味で直交.

$$E_{12}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad E_{34}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\langle E_{12},E_{34}\rangle = \mathrm{tr}\,{}^tE_{12}E_{34}$$

$$=\mathrm{tr}\left\{\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\mathrm{tr}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=0$$

$f(x)=\cos x$ $g(x)=\cos 2x$

$$\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx = \int_0^{2\pi}\cos x\cos 2x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\{\cos 3x+\cos(-x)\}\,dx=0.$$

同様に $\cos mx \perp \cos nx$ $(m\neq n)$

$\sin mx \perp \sin nx$

なお $\{\cos mx\}_{m\in\mathbb{Z}}$ は V の"基底", すなわち

任意の $[0,2\pi]$ の連続関数 $f(x)$ は

$$f(x)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m\cos mx$$

とかける.

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi} a_m\cos mx\cos nx\,dx$$

$$=a_m\int_0^{2\pi}(\cos nx)^2\,dx$$

以降は Fourier 級数論を見ること.

・内積に付随する対称行列.

定義 有限次元のベクトル空間 V と V の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ が与えられたとする. V の基底 $\{v_1\cdots v_n\}$ に関する内積 $\langle\ ,\ \rangle$ の表現行列 A とは $A=(a_{ij})$ としたとき,

$$a_{ij}=\langle v_i, v_j\rangle$$

例 $V = \{$2次以下の多項式$\}$

$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$

Vの基底として $\{1, x, x^2\}$ を取ったとき

$\langle , \rangle$の表現行列は,

$a_{11} = \langle 1, 1 \rangle = \int_0^1 1 \cdot 1\,dx = 1$

$a_{12} = \langle 1, x \rangle = \frac{1}{2}$

$a_{13} = \langle 1, x^2 \rangle = \frac{1}{3}$

$a_{22} = \langle x, x \rangle = \frac{1}{3}$

$a_{23} = \langle x, x^2 \rangle = \frac{1}{4}$

$a_{33} = \langle x^2, x^2 \rangle = \frac{1}{5}$ より

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$ となる.

※ Aは定義より対称行列.

例 $V = M(2, \mathbb{R}) = \{2\times 2$の行列 (成分は実数)$\}$

$V \ni A, B$ に対し $\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}({}^tAB)$

Vの基底 $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\cdots$

に関する表現行列は

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow E_{11} \\ \leftarrow E_{12} \\ \leftarrow E_{21} \\ \leftarrow E_{22} \end{array} \end{array}$$

となる.