11/30 テスト返却 12/7

今日のキーワード テストの解説 +

- Jordan標準型の計算法
- 線型漸化式の解き方
- 半単純分解

・Jordan標準型の計算法

1. 対角化できるか？
2. 対角化できない場合，$(A-\alpha_i E)^l x \neq 0$ となる x を見つける.

例 前回の課題

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

固有多項式は $(x-1)^3$ そこで

$$A - 1.E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

対角化できる場合，

$$\mathrm{rank}(A-E) = 0$$

でなくてはならない. 一般には 固有値 α_i の固有多項式での重複度を l_i とすると,

$$\mathrm{rank}(A-\alpha_i E) = \mathrm{rank}\, A - l_i$$

でなくてはならない. すなわち 固有値 α_i の固有ベクトルが l_i 本必要である. よってこの行列は対角化できない.

そこで $(A-E)^l x \neq 0$ となる x を見つけることにする.

$$(A-E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (A-E)^3 = O$$

$l = 2$ のとき, $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と取る. この x に対し

$$\underbrace{\begin{matrix} x, & (A-E)x, & (A-E)^2 x \\ \| & \| & \| \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{matrix}}_{\mathbb{R}^3\text{の基底となっている.}} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P$$

$$P^{-1}AP = P^{-1}\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$= P^{-1}\begin{pmatrix}1&3&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}P = P^{-1}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$ より

$$= \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{aligned}\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\end{aligned}\right.$$

・線型漸化式

数列 a_n で

$$a_{n+m} = \alpha_1 a_{n+m-1} + \alpha_2 a_{n+m-2} + \cdots + \alpha_m a_n$$

をみたすものを考える。高校などでは、a_{n+i} を x^i でおきかえた、

$$x^m = \alpha_1 x^{m-1} + \cdots + \alpha_m$$

を解き、その解を $\beta_1 \cdots \beta_m$ としたとき、

$$a_n = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i (\beta_i)^n$$ とおき、$a_1 \cdots a_m$ はじめの m 項

を代入して γ_i を求めた。こうして解が得られる根拠を説明する。

まずこのような漸化式をみたす数列の集合 V はベクトル空間をなす。よってその基底を求めれば V の元を全て書くことができる。そのために V から V への写像を

$$V \ni \{a_n\} \mapsto \{a_{n+1}\} \in V$$

問題の例では $a_{n+3} = 6a_{n+2} - 11a_{n+1} + 6a_n$

$$V \ni \{1, 0, 0, 6, 36, \cdots\}$$
$$\mapsto \{0, 0, 6, 36, \cdots\}$$

となる。

と定義する。この写像は線型写像であり

数列 e_i を

$$\{\underset{\substack{\uparrow \\ 1\text{項}}}{0} \cdots \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{項}}}{1} \cdots \underset{\substack{\uparrow \\ m\text{項}}}{0}\}$$

で定まる数列とすれば、これらは V の基底

となるが、この基底に対する表現行列は

$$\begin{array}{ccccccc} e_{i0} & \cdots & e_{ii} & \cdots & e_{im} & e_{im+1} \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & \parallel \\ 0 & & 1 & & 0 & \alpha_i \end{array}$$

e_i の $1 \sim m+1$ 項が上のようになるので

1項 〜 $i-2$ 項	0
$i-1$ 項	1
$i+1 \sim m-1$ 項	0
m 項	α_i

となり、表現行列は

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \text{O} \\ & & \ddots & \ddots & \\ & \text{O} & & 0 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{m-1} & \alpha_m \end{pmatrix}$$

対角線の1つ斜め上に1が並ぶ

この行列の固有方程式を $f(x)$ とすると、

$$f(x) = x^m - \alpha_1 x^{m-1} \cdots - \alpha_m$$

と元の漸化式で a_{n+i} を x^i でおきかえたものと同値。つまり高校での解法は上の行列の固有値を求めていたことになる。固有値 β_i に対応する固有ベクトルは $b_n = (\beta_i)^n$。特に β_i が皆異なるとき、固有ベクトルは m 本あり、これらが V の望むべき基底となる。

・半単純分解.

S, T が交換可能，すなわち $ST = TS$ であり，

S, T 共に対角化可能とする.

S は対角化可能なので

$$P_1^{-1} S P_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 E_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \alpha_n E_n \end{pmatrix}$$ E_i 単位行列

$$V_i = \{ x \in \mathbb{R}^m \mid Sx = \alpha_i x \}$$

とすると，$\mathbb{R}^m = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$. 又 $x \in V_i$

に対し　$STx = TSx = T(\alpha_i x) = \alpha_i Tx$

より　$x \in V_i$ ならば　$Tx \in V_i$

以上より

$$P_1^{-1} T P_1 = \begin{pmatrix} T_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & T_n \end{pmatrix}$$

T は対角化可能なので

$$Q^{-1} T Q = \begin{pmatrix} \beta_1 E_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_n E_n \end{pmatrix} = Q^{-1} P_1 \cancel{P_1^{-1}} T P_1^{-1} Q$$

$P_1^{-1} T P_1$

となり，T_i も対角化可能. よってある P_{2i} に対し

$P_{2i}^{-1} T_i P_{2i}$ は対角行列.

$$P = P_1 \cdot \begin{pmatrix} P_{21} & & \\ & \ddots & \\ & & P_{2n} \end{pmatrix}$$ とおけば

$$P^{-1} T P = \begin{pmatrix} P_{21}^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & P_{2n}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 & & \\ & \ddots & \\ & & T_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{21} & & \\ & \ddots & \\ & & P_{2n} \end{pmatrix}$$

$$= \text{対角行列}$$

又 $$P^{-1} S P = \begin{pmatrix} P_{21}^{-1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & P_{2n}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 E_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \alpha_n E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{21} & & O \\ & \ddots & \\ O & & P_{2n} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 E_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n E_n \end{pmatrix}$$

補足

行列 A は

$$A = S + N \qquad SN = NS$$

S 対角化可能　N 巾零

の形に一意的に分解できる.

S は次のようにして計算できる.

A の固有多項式を

$$f(x) = (x-\alpha_1)^{l_1} \cdots (x-\alpha_n)^{l_n}$$

としたとき, $f_i(x) = f(x) / (x-\alpha_i)^{l_i}$

$$\text{G.C.D.}\{f_1(x) \cdots f_n(x)\} = 1$$

となるので

$$m_1(x) f_1(x) + \cdots + m_n(x) f_n(x) = 1$$

となる多項式が存在する. この $m_i(x)$ を用いて

$$\left.\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m_i(A) f_i(A) \\ N &= A - S \end{aligned}\right\} \text{として定義}$$

すると S, N は A の多項式なので互いに交換可能.

S 対角化可能, N 巾零を示すのが少しややこしい.