11/19.

前回の課題.

問2.

$N^3 \neq O$, $N^4 = O$ より $N^3 x \neq 0$ となる $x \in \mathbb{R}^4$ が存在する. すると, x, Nx, N^2x, N^3x は1次独立である. 何故なら

$$\alpha_1 x + \alpha_2 Nx + \alpha_3 N^2 x + \alpha_4 N^3 x = 0$$

とおけば N^3 をかけると

$$\alpha_1 N^3 x + \alpha_2 N^4 x + \alpha_3 N^5 x + \alpha_4 N^6 x = 0$$

$N^4 = O$ より上の式は

$$\alpha_1 N^3 x = 0$$

$N^3 x \neq 0$ より $\alpha_1 = 0$. 同様に $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ が出る. x, Nx, N^2x, N^3x は皆 $\mathbb{R}^4$ の元なので $\{x, Nx, N^2x, N^3x\}$ は基底となる.

$P = (N^3x \ N^2x \ Nx \ x)$ とおけば P^{-1} が存在し,

$$P^{-1}N^3x = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \quad P^{-1}N^2x = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \cdots$$

よって

$$\begin{aligned}
P^{-1}NP &= P^{-1}(N^4x, N^3x, N^2x, Nx) \\
&= P^{-1}(0, N^3x, N^2x, Nx) \\
&= (0, P^{-1}N^3x, P^{-1}N^2x, P^{-1}Nx) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

今回のキーワード. まとめ.

問1.

(1) 次の2つを確認すれば良い.

① $\{a_n\}, \{b_n\} \in V$ に対し $\{a_n + b_n\} \in V$

② $\alpha \in \mathbb{C}$, $\{a_n\} \in V$ に対し $\{\alpha a_n\} \in V$

①
$$\begin{aligned}
a_{n+2} + b_{n+2} &= (6a_{n+1} - 5a_n) + (6b_{n+1} - 5b_n) \\
&= 6(a_{n+1} + b_{n+1}) - 5(a_n + b_n)
\end{aligned}$$

よって数列 $\{a_n+b_n\}$ は与えられた漸化式をみたし，$\{a_n+b_n\}\in V$ である。

(2) V から $\mathbb{R}^2$ への線型写像 f を

$$V \ni \{a_n\} \longmapsto (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$$

と定める。これは全単射である。

(全射性) $(\alpha, \beta)\in\mathbb{R}^2$ に対し $a_1=\alpha$, $a_2=\beta$ とすれば

$$a_3 = 6\alpha - 5\beta$$

$$a_4 = 6a_3 - 5a_2 = 36\alpha - 35\beta$$

$$\vdots$$

と漸化式をみたす数列が定まり，定義から

$$f(\{a_n\}) = (\alpha, \beta)$$

(単射性) $\mathrm{Ker} f = 0$ すなわち

$$f(\{a_n\}) = (0,0) \Longleftrightarrow \forall n,\ a_n = 0$$

を示す。$a_1 = a_2 = 0$ であれば，漸化式に代入して考えれば全ての n に対し $a_n = 0$ //

以上より $\dim V = \dim \mathbb{R}^2 = 2$

次に漸化式をみたす数列として

$$a_n = 5^n, \quad b_n = 1$$

が取れる。これらは V で1次独立。なぜなら

$$f(\{a_n\}) = (25, 5)$$

$$f(\{b_n\}) = (1, 1)$$

1次独立。

よって $\{5^n, 1\}$ が基底となり，V の全ての元は

$$c_n = \alpha\cdot 5^n + \beta\cdot 1$$

とかける。

問2.

線形写像 f の基底 $\{v_1 \cdots v_m\}$ に関する表現行列 A とは $m\times m$ 行列で $A=(a_{ij})$,

基底の数

$f: V\to V$ とすれば $w=\sum b_i v_i \in V$ に対し

$$f(w) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_j\right) v_i$$

となるもの。

特に $W = V_{\cancel{j}\,k}$ ($b_1 = \cdots = b_{\cancel{j}\,k} = \cdots = b_m = 0$)

ここだけ1.

のとき $f(w) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} V_i$ となる. これから

Aを求めるには 各基底をfでうつしたものの基底 $\{V_1, \cdots, V_m\}$ に関する座標を列ベクトルとして取ればよい. この問題では

$f(1) = 0 \quad f(x) = 1 \quad f(x^2) = 2x \quad f(x^3) = 3x^2$

$= 1\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + 0\cdot x^3$

となるので,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

次に基底 $\{1, x, \frac{1}{2}x^2, \frac{1}{6}x^3\}$ を取る.

$f(1) = 0 \quad f(x) = 1 \quad f(\frac{1}{2}x^2) = x \quad f(\frac{1}{6}x^3) = \frac{1}{2}x^2$

$\| \; 0\cdot 1 + 0\cdot x + 1\cdot\frac{1}{2}x^2 + 0\cdot\frac{1}{6}x^3$

より表現行列は

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vは3次以下の多項式なので fを4回やると0となる.

これは $A^4 = O$ を意味する. 又 $A^3 \neq O$ なので

$A^3 \cancel{x}\, y \neq 0$ となる x を取れば, $\{A^3 \cancel{x}\,y, A^2 \cancel{x}\,y, A\cancel{x}\,y, \cancel{x}\,y\}$ は V の基底となり, その表現行列は上のようになる.

問3.

$V_i = \{x \in \mathbb{R}^m \mid Sx = \alpha_i x\}$ とする.

このとき, $\mathbb{R}^m = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$

又 $\forall x \in V_i$ に対し $Sx \in V_i$

よって V_i の基底を並べたものを P_i とすれば

$$P_i^{-1} S P_i = \begin{pmatrix} S_1 & O & \cdots & O \\ O & S_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & S_n \end{pmatrix}$$

さらに $\forall x \in V_i$ とすると $Sx = S_1 x = \alpha_1 x$

よって

$$P_1^{-1}SP_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1E_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_nE_n \end{pmatrix} \qquad E_i\text{は単位行列}$$

次に $x\in V_i$ に対し

$$Nx = \frac{1}{\alpha_i}NSx = \frac{1}{\alpha_i}SNx$$

上の式を見なおせば

$$S(Nx) = \alpha_i(Nx) \Rightarrow Nx \in V_i$$

よって

$$P_1^{-1}NP_1 = \begin{pmatrix} N_1' & & & O \\ & N_2' & & \\ & & \ddots & \\ O & & & N_n' \end{pmatrix}$$

各 N_i' について $P_{2i}^{-1}N_i'P_{2i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & O \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ O & & & 0 \end{pmatrix}$

となる P_{2i} が取れる.（N_i はべき零）.

よって $P = P_1 \cdot \begin{pmatrix} P_{21} & & O \\ & \ddots & \\ O & & P_{2n} \end{pmatrix}$ と取れば,

$$P^{-1}NP = \begin{pmatrix} P_{21}^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & P_{2n}^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N_1' & & O \\ & \ddots & \\ O & & N_n' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_{21} & & O \\ & \ddots & \\ O & & P_{2n} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} N_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & N_n \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}SP = \begin{pmatrix} P_{21}^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & P_{2n}^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1E_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_nE_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_{21} & & \\ & \ddots & \\ & & P_{2n} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1P_{21}^{-1}E_1P_{21} & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_nP_{2n}^{-1}E_nP_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1E_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_nE_n \end{pmatrix}$$