11/26 中間試験

11/19. これまでのまとめ.

11/12 例11 課題の復習

問2. $a_1 \cdots a_n$ 自然数 $G.C.D(a_1 \cdots a_n)=1$

このとき a_i と a_j は互いに素ではない. $(n \geq 3)$

さらに $n \geq 3$ のとき, どの a_i と a_j も互いに素ではない例がある. ← 具体例をあげよ.

解答例. (1)

整数 $\mathbb{Z}$ の部分集合 S を

$$S := \left\{ d = \sum_{i=1}^{n} m_i a_i \;\middle|\; m_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

$S \neq \mathbb{Z}$ として矛盾を導く. このとき,

S の 0 でない最小の正の元を d とおく.

S は当然 $a_1 \cdots a_n$ を全て含んでいる.

これから 全ての a_i は d で割り切れてしまう.

何故なら $S \ni \alpha, \beta \Rightarrow \alpha \pm \beta \in S$ なので

$$\left(\qquad \right)$$

これは $G.C.D. (a_1 \cdots a_n) = d$. これは矛盾.

本日のキーワード. 巾零行列, 半単純分解

定義 $m \times m$ 行列 N が巾零行列とは

ある n があり $N^m = O$ となるもののこと.

Q. $n \leq m$ を示せ.

補題

巾零行列 N はある行列 P があり

$$P^{-1}NP = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

対角線の上に 1がいくつか並ぶ

※ 上の形を巾零行列の標準形と言う.

2×2 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

3×3 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

説明.

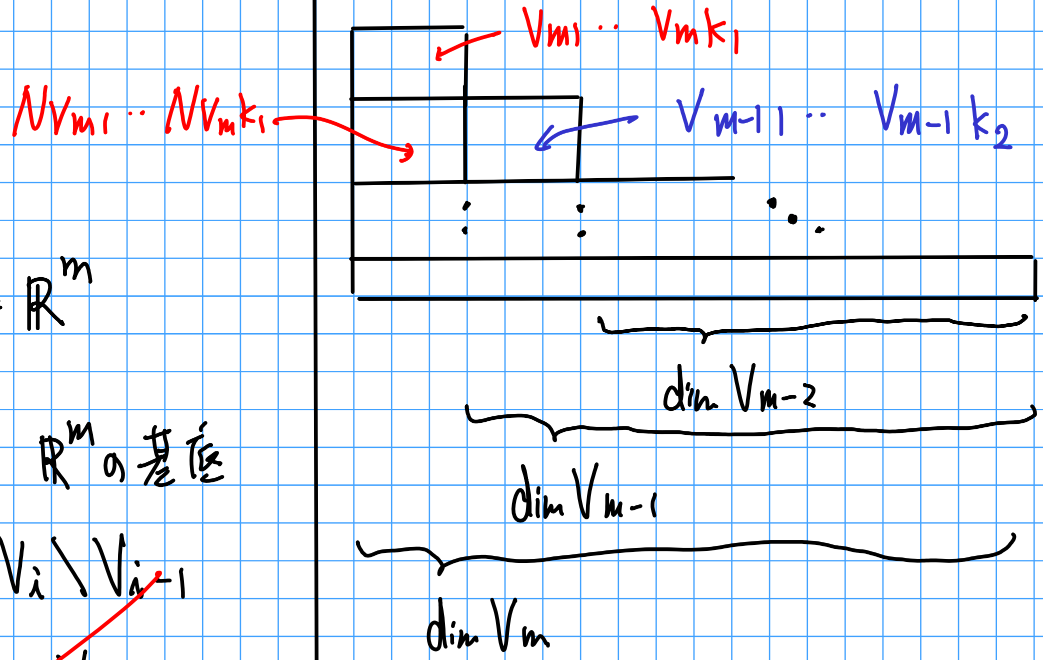
$$V_i = \{x \in \mathbb{R}^m \mid N^i x = 0\}$$

$$V_1 \subseteq V_2 \subseteq \cdots \subseteq V_m = \mathbb{R}^m$$

ここで
$$\left.\begin{array}{l} V_m \setminus V_{m-1} \\ V_{m-1} \setminus V_{m-2} \\ \vdots \\ V_2 \setminus V_1 \end{array}\right\}$$
これらから $\mathbb{R}^m$ の基底 ~~$v_{ij} \in V_i \setminus V_{i-1}$ $Nv_{ij} \in V_{i-1}$ が取れたとする~~

を V_m から $\dim V_m - \dim V_{m-1}$ 個 V_{m-1} に入らないような1次独立な元を取る.

これらを $\{v_{m1} \cdots v_{mk_1}\}$ とする. 次に V_{m-1} から $\{Nv_{m1} \cdots Nv_{mk_1}\}$ と $\dim V_{m-1} - \dim V_{m-2}$ 個の V_{m-2} に入らない1次独立な元を取る.



※ この基底の取り方は別ファイルにして掲載します.

例 $N^m = O$ $N^{m-1} \neq O$ とする.

$V_m \setminus V_{m-1} \ni x$ を取り

$\{x, Nx, \ldots, N^{m-1}x\}$ を考えると

これは $\mathbb{R}^m$ の基底となる.

・行列の半単純分解

定義 $m\times m$ 行列 S が半単純とは、ある行列 P があり、$P^{-1}SP=$ 対角行列 とできるときを言う。

命題 $m\times m$ 行列 A は

$$\underset{\text{半単純}}{S}\ \ \underset{\text{巾零}}{N}\qquad A=S+N\qquad SN=NS$$

と分解でき、その分解は一意的。すなわち

$$A=S'+N'\qquad S'N'=N'S'$$

(S': 半単純、N': 巾零)

であれば $S=S'$　$N=N'$

応用例 f: 多項式　A $m\times m$ 行列

A の固有値を $\{\alpha_1 \cdots \alpha_n\}$ とすると

$f(A)$ の固有値は $\{f(\alpha_1)\cdots f(\alpha_n)\}$

$$Ax=\alpha x \Rightarrow f(A)\cdot x=f(\alpha)x$$

より $\{f(A)$ の固有値$\}\supseteq\{f(\alpha_1)\cdots f(\alpha_n)\}$ はわかる。

$A=S+N$ と分解し $P^{-1}AP=P^{-1}SP+P^{-1}NP$ を考えることで S … 対角行列 と思って良い。

$$P^{-1}f(A)P=f(P^{-1}AP)=f(P^{-1}SP+P^{-1}NP)$$

$f(x)$ の n 次の項 a_nx^n だけを抜き出して考えれば

$$a_n(P^{-1}SP+P^{-1}NP)^n=a_nP^{-1}S^nP+(N\text{を含む項})$$

よって

$$f(P^{-1}AP)=\underbrace{f(P^{-1}SP)}_{\text{対角行列}}+\underbrace{(N\text{を含む項})}_{\text{巾零}}$$

命題と A の Jordan 標準型を考えると

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}J_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & J_n\end{pmatrix}\qquad J_i=\begin{pmatrix}\alpha_i & 1 & & 0\\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & \alpha_i\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha_i & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_i\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1 & & 0\\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & 0\end{pmatrix}$$

より $P^{-1}SP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \alpha_1 & & & \\ & & & \alpha_2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \alpha_n \end{pmatrix}$

$P^{-1}NP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & & O & \\ & & \ddots & 1 & & \\ & & & \ddots & 1 & \\ & P & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$ 対角成の1つ右上に1が並ぶ

の1つの例であって、しかもこれが唯1つのもの

よって $(A$の固有値$) = (S$の固有値$)$

$(f(A)$の固有値$) = (P^{-1}f(A)P$の固有値$)$

$= (f(P^{-1}SP)$の固有値$)$

$= \{f(\alpha_1) \ \cdots \ f(\alpha_n)\}$