11/12

前回の課題

問1. A の最小多項式を $\varphi_A(x)$ とする.

このとき, $\varphi_{P^{-1}AP}(x) = \varphi_A(x)$

何故なら $\varphi_A(P^{-1}AP) = P^{-1}\varphi_A(A)P = O$

となるので $\varphi_{P^{-1}AP}(x)$ は $\varphi_A(x)$ を割り切る.

又 $\varphi_{P^{-1}AP}(A) = P\ \varphi_{P^{-1}AP}(P^{-1}AP)\ P^{-1}$

$= O$

となるので $\varphi_A(x)$ は $\varphi_{P^{-1}AP}(x)$ を割り切る.

$\varphi_A(x)$ も $\varphi_{P^{-1}AP}(x)$ も最高次の係数は 1 なので

$$\varphi_A(x) = \varphi_{P^{-1}AP}(x)$$

$A \to AB \quad P \to B^{-1}$ とすれば

$$\varphi_{AB}(x) = \varphi_{BA}(x)$$

を得る.

問2. 答 $x-3$, x^3

問3.

一般に行列 A, B に対し　$m \times m$ 行列

$$\mathrm{rank}\,A + \mathrm{rank}\,B - m \leqq \mathrm{rank}\,AB$$

これから $AB = O$ であれば

$$\mathrm{rank}\,A + \mathrm{rank}\,B - m \leqq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad m \leqq (m - \mathrm{rank}\,A) + (m - \mathrm{rank}\,B)$$

これは証明すべき式の $n=2$ の場合である.

次に $ABC = O$ とする.

$$\mathrm{rank}\,AB + \mathrm{rank}\,C - m \leqq 0$$

$$\mathrm{rank}\,A + \mathrm{rank}\,B - m + \mathrm{rank}\,C - m \leqq 0$$

$$(\mathrm{rank}\,A - m) + (\mathrm{rank}\,B - m) + (\mathrm{rank}\,C - m) \leqq -m$$

これは証明すべき式の $n=3$ の場合に (-1) をかけたものとなる.

このように $A_1 \cdots A_n$ の積を1つずつならせば証明できる.

11/26 中間試験

本日のキーワード　広義固有空間，巾零行列

目標　A　$m\times m$ 行列　固有値 $\alpha_1 \cdots \alpha_n$

ある行列 P があり，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_1 & & & O \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & J_n \end{pmatrix} \qquad J_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & 1 & & O \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ O & & & \alpha_i \end{pmatrix}$$

とできることを示す．

ここまで示したこと．

ある行列 P' があり

$$(P')^{-1}AP' = \begin{pmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ O & \cdots & & A_n \end{pmatrix}$$

ただし P' は A の α_i に対する広義部分空間

$$V_i = \{ x \in \mathbb{R}^m \mid (A-\alpha_i E)^{l_i} x = 0 \}$$

の基底を並べたもの．

前回　A の固有多項式を $f_A(x) = \prod_{i=1}^{n} (x-\alpha_i)^{l_i}$

とおき，

$$f_i(x) = f_A(x) / (x-\alpha_i)^{l_i} = \prod_{k \neq i} (x-\alpha_k)^{l_k}$$

とおき，G.C.D. $\{f_i(x)\} = 1$ なので多項式

$m_i(x)$ で $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i(x) f_i(x) = 1$ となるものを取った．

$B_i = m_i(A) f_i(A)$　　$B_i^2 = B_i$　　$\sum B_i = E$

$W_i = \{ x \in \mathbb{R}^m \mid B_i x = x \}$　　$B_i B_j = O \ (i \neq j)$

とすると，$\mathbb{R}^m = W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$ となることを言った．

$V_i = W_i$ を示し，前回の課題 問1 を解くと

P' の存在がわかる．

$V_i = W_i$ を示す．

まず $x \in V_i$ を取る．

$B_i x = x$ を示せば $x \in W_i$ であるが　$m_i(x) f_i(x)$ と

$(x-\alpha_i)^{l_i}$ は互いに素なので

$$n_1(x)(x-\alpha_i)^{l_i} + n_2(x) m_i(x) f_i(x) = 1$$

となる多項式 $n_1(x), n_2(x)$ が存在する．

これに A を代入すると，

$$n_1(A)(A-\alpha_i E)^{l_i} + n_2(A)B_i = E$$

両辺に x をかけると，

$$n_1(A)\underbrace{(A-\alpha_i E)^{l_i}x}_{=0} + n_2(A)B_i x = x$$

よって $B_i x = B_i(n_2(A)B_i x) = B_i^2 n_2(A)x$

$$= B_i n_2(A)\cdot x = n_2(A)B_i x = x$$

逆に $B_i x = x$ とする．

$m_i(x)f_i(x)(x-\alpha_i)^{l_i}$ は $f_A(x)$ で割り切れる．

$$m_i(A)f_i(A)(A-\alpha_i E)^{l_i} = O$$

$$B_i(A-\alpha_i E)^{l_i} = O$$

$$(A-\alpha_i E)^{l_i}x = (A-\alpha_i E)^{l_i}B_i x$$

$$= B_i(A-\alpha_i E)^{l_i}x = O\cdot x = 0$$

すなわち $x \in V_i$

さて，

$$A' = \begin{pmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & \cdots & O \\ \vdots & & \ddots & \\ O & & & A_n \end{pmatrix}$$ とする．

$$P'' = \begin{pmatrix} P_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & P_n \end{pmatrix}$$ とおけば

$$(P'')^{-1}A'P'' = \begin{pmatrix} P_1^{-1}A_1P_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & P_n^{-1}A_nP_n \end{pmatrix}$$

となるので，小さい行列に対して

$$P_i^{-1}A_iP_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & 1 & & O \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ O & & & \alpha_i \end{pmatrix}$$

となる P_i が存在すれば，証明は完了する．

ここで A_i は V_i から V_i への A から定まる表現行列

となっている．このことから

$$(A_i-\alpha_i E)^{l_i} = O$$

となる．

何故ならば　V_iの元は　$(0 \cdots x \cdots 0)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\uparrow$ i番目

とかける。x　$(A-\alpha_i E)^{l_i} x = 0$　とみたすが

$$(P')^{-1}(A-\alpha_i E)^{l_i} P'(P')^{-1} x = 0$$

$$\| $$

$$(P'^{-1}AP' - \alpha_i E)^{l_i}(P')^{-1} x = 0$$

$$\|$$

$$(A' - \alpha_i E)^{l_i}(P')^{-1} x = 0$$

$$\|$$

$$\begin{pmatrix} (A_1-\alpha_i E)^{l_i} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & (A_i-\alpha_i E)^{l_i} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & (A_n-\alpha_n E)^{l_n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ x \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\|$$

$$(A_i - \alpha_i E)^{l_i} x = 0$$

xをV_iの基底に取れば，$(A_i-\alpha_i E)^{l_i} = O$

がわかる。つまり $(A_i - \alpha E)^{l_i}$ は 巾零行列

そこで一般に巾零行列 N に対し，ある行列

P があり，

$$P^{-1}NP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$ とできたとすれば

$$P^{-1}(A_i - \alpha_i E)P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}A_iP - \alpha_i E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}A_iP = \begin{pmatrix} \alpha_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & \alpha_i \end{pmatrix}$$

注）N　4×4行列

$N^3 = O$　$N^2 \neq O$ のとき　$P^{-1}NP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$N^2 = O$　$N \neq O$　$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

N　$m \times m$行列で　$N^m = O$　$N^{m-1} \neq O$　とする。

すると　あるxで　$N^{m-1}x \neq 0$　となるものがある。

このxに対し

$x, Nx, \cdots\ N^{m-1}x$　は　1次独立

よって　m個の　$x, Nx \cdots\ N^{m-1}x$　は　$\mathbb{R}^m$の基底

$P = (\cancel{x}\ N^{m-1}x,\ \overset{m-2}{N}x\ \cdots\ \cancel{N^{m-1}}x)$ とおけば

P^{-1} は存在し,

$$NP = (\cancel{Nx}\ 0,\ \cancel{N^2x}\ N^{m-1}x,\ \sim,\ \cancel{N^{m-1}x}\ Nx,\ 0)$$

$$P^{-1} \cdot N^i x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow m-i \text{ 番目}$$

より

$$P^{-1}NP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & O \\ \vdots & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{R}^m \xleftarrow[P']{\cong} V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$$

$$x \in \mathbb{R}^m$$

$$P'^{-1}x \longmapsfrom (0, \cdots, \underset{i\text{番目}}{x}, \cdots, 0)$$