11/5　11/26 中間試験

本日のキーワード　最小多項式.

前回の課題の解説

問2. 解　$4a^3+27b^2=0$.

問1.

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\delta_{kj}$　$(i\neq k)$ の場合.

$i=k$ の時のように　$\det A=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_j$

とやって C_j を求めるやり方では出来ない

$A'=(a_{ij})$ 但し k行と i行が等しい,

すなわち　$a_{ij}=a_{kj}$ とおいてから,

$$\det A'=\sum a_{ij}C_j$$

とするか, 素直に

1行

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\delta_{kj}=a_{i1}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ & & \\ a_{n1} & & a_{nn}\end{vmatrix}\times(-1)^{k+2}+$$

← k行

$$\cdots + a_{in}\begin{vmatrix} a_{11} & & a_{1n}\\ & & \\ a_{n1} & & a_{nn}\end{vmatrix}$$

k行 $\times(-1)^{n+k+1}$

n列

$$=(-1)^{k+2}\begin{vmatrix} 0 & a_{21} & & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & & & \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & a_{2n} & & a_{nn}\end{vmatrix}$$

← k行に $(a_{i1}\ 0\ \cdots\ 0)$

1列に $\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ a_{i1}\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ ← k行　← を加える.

$$+\cdots+(-1)^{n+k+1}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ & & \vdots\\ 0 & \cdots & a_{in}\\ & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{in}\\ & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

← k行

$=0$　(i行とk行が同じなので)

定義　$n\times n$ 行列 A の最小多項式 $\varphi_A(x)$ とは，

$\varphi_A(A)=O$ となる最小次数の多項式．

例　$A=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$　$\varphi_A(x)=x-2$

$B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$　$\varphi_B(x)=x^2$

最小多項式の性質を述べるために固有多項式の性質を復習する．

A $n\times n$ 行列に対し　$f_A(x)=\det(xE-A)$

と書くことにする．

- $f_{P^{-1}AP}(x)=f_A(x)$
- $\varphi_{P^{-1}AP}(x)=\varphi_A(x)$ ← 問1のヒント．

A, B $n\times n$ 行列．$\det B\neq 0$ のとき

- $f_{AB}(x)=f_{BAB^{-1}}(x)=f_{BA}(x)$

$\varphi_{AB}(x)=\varphi_{BA}(x)$

- $f_A(x)=0$ の解 α は A の固有値であり，Aの固有値は $f(x)=0$ の解．

$\varphi_A(x)=0$

Q　$f_A(x)\neq\varphi_A(x)$ であるような A の例をあげよ．

証明．$f_A(\alpha)=0$ より　$\det(\alpha E-A)=0$．

よって $(\alpha E-A)\boldsymbol{x}=0$ となる $\boldsymbol{x}\neq 0$ が存在する．

これを変形すると，$\alpha\boldsymbol{x}-A\boldsymbol{x}=0\iff\alpha\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{x}$

次に $\varphi_A(x)=x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m$ とする．

$\varphi_A(A)=A^m+b_1A^{m-1}+\cdots+b_mE$ に対し，

$$\begin{aligned}\varphi_A(A)\cdot\boldsymbol{x}&=(A^m+b_1A^{m-1}+\cdots+b_mE)\boldsymbol{x}\\&=A^m\boldsymbol{x}+b_1A^{m-1}\boldsymbol{x}+\cdots+b_m\boldsymbol{x}\\&=\alpha^m\boldsymbol{x}+b_1\alpha^{m-1}\boldsymbol{x}+\cdots+b_m\boldsymbol{x}\\&=\varphi_A(\alpha)\boldsymbol{x}\end{aligned}$$

$\varphi_A(A)=O$ より　$\varphi_A(\alpha)=0$

定理 $n\times n$ 行列 A が対角化可能，すなわち

ある行列 P があり $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \ddots \end{pmatrix}$ (対角行列)

である必要十分条件は 最小多項式 $\varphi_A(x)$ が

重解をもたない。

例 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \varphi_A(x) = x-2$

$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \varphi_B(x) = x^2$ 対角化できない。

$C = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $\quad \varphi_C(x) = x^2 - 2\cos\theta\, x + 1$

対角化できる。

証明. まず $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \ddots \end{pmatrix}$ となる P が存在したとする。 $\varphi_{P^{-1}AP} = \varphi_A$ より $\varphi_{P^{-1}AP}$ を考えれば

よい。

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & & & O \\ & \ddots & & & & & \\ & & \alpha_1 & & & & \\ & & & \alpha_2 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \alpha_2 & \\ O & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 E_1 & & & O \\ & \alpha_2 E_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \alpha_n E_n \end{pmatrix} \quad E_i \text{ 単位行列}$$

多項式 $(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)$ を考える。

x に $P^{-1}AP$ を代入すると，

$$x-\alpha_i \rightsquigarrow P^{-1}AP - \alpha_i E = \begin{pmatrix} (\alpha_1-\alpha_i)E_1 & & \\ & \ddots & O \\ & & (\alpha_n-\alpha_i)E \end{pmatrix}$$

i番目のブロック。

よって $(P^{-1}AP - \alpha_1 E)\cdots(P^{-1}AP - \alpha_n E) = O$

$P^{-1}AP$ の固有値は $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ で $\varphi_{P^{-1}AP}(x)$ は

これらを全て解にもつので 次数は n 以上。

$\varphi_{P^{-1}AP}(x) = \varphi_A(x) = (x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)$

重解なし。

次に $\varphi_A(x)$ が重解をもたない。すなわち

$$\varphi_A(x) = (x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)$$

と書けたとする。最小多項式の定義から

$$\varphi_A(A) = (A-\alpha_1E)\cdots(A-\alpha_nE) = O$$

問3より

$$n \leqq \sum_{i=1}^{n}(n-\mathrm{rank}(A-\alpha_iE))$$

さて $V_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = \alpha_i x\}$ とおく。

すると $\dim V_i = n - \mathrm{rank}(A-\alpha_iE)$

$A-\alpha_iE$ で定義される $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ の像を W_i, 核を V_i とすると

- $\dim W_i = \mathrm{rank}(A-\alpha_iE)$
- $\dim V_i + \dim W_i = n$
- V_i は上で定義した V_i と同じ

又 $i \neq j$ なる V_i と V_j の元は1次独立。何故なら1次独立でないとすると

$$a \in V_i \quad b_k \in V_j \quad \text{s.t.} \quad a = \sum \beta_k b_k$$

とかける。

$$Aa = A(\sum \beta_k b_k) = \sum \beta_k A b_k = \sum \beta_k \alpha_j b_k$$

$$\alpha_i a = \alpha_j a \quad (\text{矛盾})$$

以上から V_i の基底 $\{V_{ik}\}$ を取ると、これらを集めたものは一次独立。又数は n 個以上。

つまり $\mathbb{R}^n$ の基底をなす。$P = (V_{11}\cdots \quad V_{n1}\cdots)$ とこの基底を並べたものに取る。

$$AP = (\alpha_1 V_{11} \ \alpha_1 V_{12} \cdots \quad \alpha_n V_{n1} \cdots)$$

$$P^{-1}V_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$ 等となるので

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

問3では以下の式を既知として良い

A, B　$n \times n$ 行列とする.

$$\mathrm{rank}\,A + \mathrm{rank}\,B - n \leqq \mathrm{rank}\,AB \leqq \mathrm{Max}\{\mathrm{rank}\,A, \mathrm{rank}\,B\}$$