11/2　11/19(木). 中間試験　(予定)

キーワード　固有方程式. ケーリー・ハミルトンの定理.

宿題の復習.

1. $n\times n$ 行列 A の行列式とは

$$\det A = \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1i_1} \cdots a_{ni_n}$$　0点

理由　a_{1i_1} etc. が何を表しているのか?
$\mathrm{sgn}(\sigma)$　〃

$\sum$ をどの範囲にわたって取るのか?

2. $A = \begin{pmatrix} A_{11} & O \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$　A_{11}, $n\times n$ 行列　A_{22}, $m\times m$ 行列

A の (i,j) 成分を a_{ij} とすると A の行列式は

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n+m\,\sigma(n+m)}$$

右上のブロックが 0 なので, 上の和で 0 とならない項は

$$\{1 \cdots n\} = \{\sigma(1), \cdots, \sigma(n)\}$$
$$\{n+1 \cdots n+m\} = \{\sigma(n+1), \cdots, \sigma(n+m)\}$$

となるもの. よって ある $\rho\in S_n$ $\tau\in S_m$ があり

$$\sigma = \rho\tau$$

とかける. これから

$$\det A = \sum_{\substack{\rho\in S_n\\ \tau\in S_m}} \mathrm{sgn}(\rho\tau)\, a_{1\rho(1)} \cdots a_{n\rho(n)}\, a_{n+1\,\tau(1)} \cdots a_{n+m\,\tau(m)}$$

$$= \left\{\sum_{\rho\in S_n} \mathrm{sgn}(\rho)\, a_{1\rho(1)} \cdots a_{n\rho(n)}\right\} \times \left\{\sum_{\tau\in S_m} \mathrm{sgn}(\tau)\, a_{n+1\,\tau(1)} \cdots a_{n+m\,\tau(m)}\right\}$$

ここが飛びすぎ 挿入するなら,

$$= \sum_{\tau\in S_m} \mathrm{sgn}(\tau)\, a_{n+1\,\tau(1)} \cdots a_{n+m\,\tau(m)} \times \left\{\sum_{\rho\in S_n} \mathrm{sgn}(\rho)\, a_{1\rho(1)} \cdots a_{n\rho(n)}\right\}$$

ここで ρ に関係ない項は $\sum$ の前に出した.

3. 誤答

$$\det\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = \frac{1}{i^n}\det\begin{pmatrix} iA & -iB \\ B & A \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{i^n}\det\begin{pmatrix} B+iA & A-iB \\ B & A \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{i^{2n}}\det\begin{pmatrix} iB-A & A-iB \\ iB & A \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{i^{2n}}\det\begin{pmatrix} iB-A & 0 \\ iB & A+iB \end{pmatrix}$$

$$= \det(-A+iB)\det(A+iB)$$

正答　$\det(A-iB)\det(A+iB)$

定義　$n\times n$ 行列 A の固有多項式とは

$$f_A(x) = \det(xE-A)$$

固有多項式の性質

$$f_A(x) = f_{P^{-1}AP}(x)$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$　A_{11}, A_{22} は正方行列

$$f_A(x) = f_{A_{11}}(x)\cdot f_{A_{22}}(x)$$

特に、

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$　（上半三角行列）

$$f_A(x) = (x-a_{11})\cdots(x-a_{nn})$$

又 $f_A(x)$ は A が $n\times n$ 行列であれば n次式.

定理（ケーリー・ハミルトン）

A $n\times n$ 行列　$f_A(x) = \det(xE-A)$ としたとき、

$$f_A(A) = 0$$

証明する前に 行列を係数とする多項式に 行列を代入する時の注意を述べておく.

$$f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \cdots + A_n$$

ならば x^i を A^i でおきかえるだけで良い

$g(x) = (A_0 x - A_1)(B_0 x^n + \cdots + B_n)$

$\neq (B_0 x^n + \cdots + B_n)(A_0 x - A_1)$

$A_0 B_0$ と $B_0 A_0$ は一般に可換ではない.

証明.) Δ_{ij} で (i,j) 余因子 を表す.

$\|$

(i行 j列を除いた行列の行列式)

$\times (-1)^{\square}$

すると $A = (a_{ij})$ とすれば, 次の式が成立する.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{kj} = \begin{cases} \det A & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

これをふまえて 行列 $xE - A$ の Δ_{ij} を考える.

すると Δ_{ij} は $n-1 \times n-1$ 行列の行列式なので

$$\Delta_{ij} = b_{ij,0}\, x^{n-1} + \cdots + b_{ij,n-1}$$

行列 B_k を

$$B_k = (b_{ji,k})$$ と定義する.

すると

$$(xE - A)(B_0 x^n + \cdots + B_{n-1}) = \det(xE - A) \cdot E$$

$$(B_0 x^n + \cdots + B_{n-1})(xE - A) =$$

よって B_i は A と可換であり, x に A を代入することが出来るので, 代入すれば

(上式の左辺) $= O$

($\because$ 右辺) $= A^n + a_1 A^{n-1} + \cdots + a_n E$

{ただし $f_A(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ とおいた.}

$\|$

$\det(xE - A)$

右辺がまさしく $f_A(A)$ であるので $f_A(A) = O$

FACT. $n \times n$ 行列 A の固有値は固有方程式の解である.

定義　$n\times n$ 行列 A の最小多項式とは多項式 $g(x)$ で $g(A)=O$ をみたす最小の次数の多項式のことを言う.

例題　X　2×2 行列

$$X^2=E \not\Rightarrow X=\pm E$$

$$X^4=E \Rightarrow X^2=\pm E$$

補題　A　$n\times n$ 行列とする. 多項式 $f(x)$ で $f(A)=O$ をみたすものは A の最小多項式 $g(x)$ で割り切れる.

$g(x)$ の次数 $>$ $r(x)$ の次数

証明)　$f(x)=g(x)q(x)+r(x)$ とおける.

上式の係数は全て A と可換なので, 代入しても等式が成立. よって

$$\underset{O}{\underset{\shortparallel}{f(A)}}=\underset{O}{\underset{\shortparallel}{g(A)}}q(A)+r(A)$$

仮定より　$r(A)=O$.　となるが {$g(x)$ の次数} $>$ {$r(x)$ の次数} となり, これは $g(x)$ が A の最小多項式であることに矛盾.

系1.　A　$n\times n$ 行列　A の最小多項式は A の固有多項式 $f_A(x)$ を割り切る.

系2　A　$n\times n$ 行列.　A の最小多項式の次数は n 以下である.