10/29 キーワード, 行列式

宿題の復習

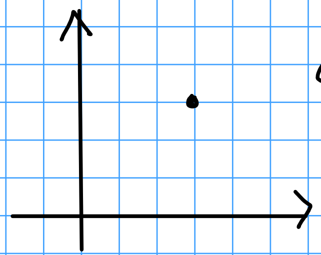
行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ に対し線型写像を

$$\mathbb{R}^3 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

と定義する. 基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

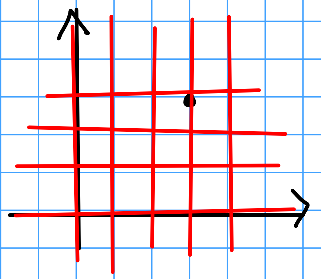
に関する表現行列を求めよ.

・座標について.

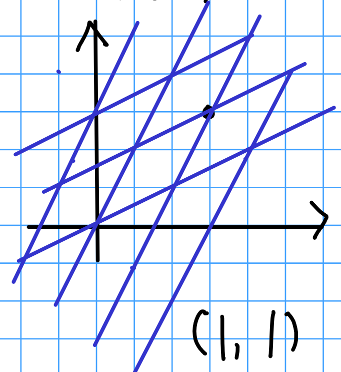


← 点があったとする.

平面への目盛の入れ方は何通りもある.



(3, 3)



(1, 1)

・座標の変換

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{A\times} & \mathbb{R}^3 \\ {\scriptstyle P\times}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle P^{-1}\times} \\ \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \end{array}$$

← 普通の xyz 座標

← 下側は $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right.$ の基底で座標を取って考える.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

・解答例

$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ とおくと $P^{-1}AP$ が求める行列

ここで $p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $p_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $p_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ とおく.

すると $Ap_1 = 2p_1$ $Ap_2 = 2p_2$ $Ap_3 = p_3$

であるから $AP = A(p_1\ p_2\ p_3) = (2p_1\ 2p_2\ p_3)$

一方 $E = P^{-1}P = P^{-1}(p_1\ p_2\ p_3)$ より

$P^{-1}p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $P^{-1}p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $P^{-1}p_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

よって

$$P^{-1}AP = P^{-1}(2p_1\ 2p_2\ p_3) = (2P^{-1}p_1\ 2P^{-1}p_2\ P^{-1}p_3)$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

宿題の復習 その2.

$\alpha \neq 0$ とする. $A^2 = \alpha A$ であれば, ある行列 Q があり, $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \alpha E & O \\ O & O \end{pmatrix}$ とできることを示せ.

誤答. $V_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 1 \cdot x\}$

$V_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$

とおくと, $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^n$

しかし, $Ax = x \Leftrightarrow (A - E)\cdot x = 0$

$\alpha \neq 1$ のとき, $A^2 = \alpha A$ より A の固有値は 0 か α のみ. よって上の式をみたす x は 0 のみ

行列式の続き.

補題 F を $n \times n$ 行列を変数とする関数

$F(X) = F(x_{11} \cdots x_{nn})$ $\quad X = (x_{ij})$

で次の2つの性質を持つものとする.

1) X の各列に関して線型

$F(x_1 \cdots \sum_{j=1}^{n} c_j y_j \cdots x_n)$ $\quad x, y$ は列ベクトル

$= \sum_{j=1}^{n} c_j F(x_1 \cdots y_j \cdots x_n)$

2) 各列の入れかえに対し行列式と同じ性質をもつ

$\sigma \in S_n = \{n$ 文字の置換$\}$

$F(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)}) = \mathrm{sgn}(\sigma) F(x_1 \cdots x_n)$

このとき, ある定数 c があり

$$F(X) = c \det X$$

※ 上の補題は「列」を「行」にかえても成立する.

証明. $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ i行目が1. とおく.

すると

$$x_j = \{X の j 列ベクトル\} = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} e_i$$

$$F(x_1 \cdots x_n) = F\left(\sum_{i_1=1}^{n} x_{\underset{i_1}{\cancel{i}}1} e_{i_1} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} x_{i_n \underset{n}{\cancel{1}}} e_{i_n}\right)$$

$$= \sum_{i_1 \cdots i_n = 1}^{n} x_{i_1 1} x_{i_2 2} \cdots x_{i_n n} \times F(e_{i_1} \cdots e_{i_n})$$

$$= \sum_{i_1 \cdots i_n = 1}^{n} x_{i_1 1} \cdots x_{i_n n} \operatorname{sgn}(\sigma) F(e_1 \cdots e_n)$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ i_1 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

$$= (\det X) F(e_1 \cdots e_n)$$

これは定数

$c = F(e_1 \cdots e_n)$ とすれば

$$F(X) = c \det X$$

行列式の展開.

定義 A $n \times n$ 行列

A の (i,j) 余因子 Δ_{ij} を

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det\{A から i 行 j 列を抜いたもの\}$$

例題

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \Delta_{1j}$$ を示せ.

解答の前にイメージをあげておく.

$$\det A = a_{11} \times (\pm 1) \times \det(1行1列を抜いたもの)$$
$$+ a_{12} \times (\pm 1) \times \det(1, 2 \quad 〃 \quad)$$
$$\vdots$$
$$+ a_{1n} \times (\pm 1) \times \det(1, n \quad 〃 \quad)$$

解答　行列式の定義より

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} c_j a_{1j}$$

行列式の各項を a_{1j} でくくったもの

$c_j = \Delta_{1j}$ を示せばよい.

c_j の値は $a_{11} \cdots a_{1n}$ で a_{1j} だけを 1, 他のものは 0 にしたときの $\det A$ の値である.

すなわち

$$c_j = \det \begin{array}{c} j\text{列} \\ \begin{pmatrix} 0 \cdots & 1 & \cdots 0 \\ a_{21} & & a_{2n} \\ & \cdots & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$= (-1)^{\square} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2j} & a_{21} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{nj} & a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \Delta_{1j}$$

終結式

$f = a_0 x^n + \cdots + a_n = 0$

$g = b_0 x^m + \cdots + b_m = 0$

これらの式から $n+m \times n+m$ 行列 $R(f,g)$ を次のように定義する.

$$R(f,g) = \begin{array}{l} \left.\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n & & & \\ & a_0 & \cdots & & a_n & & \\ & & \ddots & & & \ddots & \\ & & & a_0 & \cdots & & a_n \\ b_0 & \cdots & & b_m & & & \\ & b_0 & & & b_m & & \\ & & \ddots & & & \ddots & \\ & & & b_0 & \cdots & & b_m \end{pmatrix}\right. \end{array} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} m\text{行} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n\text{行} \end{array}$$

命題

$\{ f = g = 0$ が解をもつ$\} \Leftrightarrow \det R(f,g) = 0$

例　$x^2 + ax + b = 0$ が重解をもつのは

$$\begin{cases} x^2 + ax + b = 0 \\ 2x + a = 0 \end{cases}$$

が共通解をもつとき.

このとき,

$$R(f,g) = \left(\begin{array}{ccc} 1 & a & b \\ \hline 2 & a & 0 \\ 0 & 2 & a \end{array}\right) \begin{array}{l} 1\text{行} \\ \\ 2\text{行} \end{array}$$

$$\det R(f,g) = a^2 + 4b - 2a^2$$

$$= 4b - a^2$$

となるので $4b - a^2 = 0$ が求める条件.