10/26. キーワード　固有方程式，行列式

線形写像 $f: V \longrightarrow W$ の表現行列 A は基底の取り方によって，色々かわる．特に基底として f の固有ベクトルを取れた場合，A は対角行列となる．

定義　線型写像 $f: V \to V$ の固有ベクトルとは

$v \in V$，$f(v) = \alpha v$
$\ne 0$

をみたすベクトルのことを言う．又 α を f の固有値という．

例　A $n \times n$ 行列　$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 線型写像を

$$\mathbb{R}^n \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

と定めたとき，f の固有ベクトルとは，

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\ne 0}$$ をみたすベクトル．

※ 固有ベクトルの求め方

$$Ax = \alpha x \iff (A - \alpha E)x = 0$$

上の方程式をみたす 0 でないベクトル x が存在するためには，$\det(A - \alpha E) = 0$ が必要．

ただし $\det$ は行列式．$\det(A - \alpha E)$ は α の式としては，A が $n \times n$ 行列であれば，n 次式

α の方程式　$\det(A - \alpha E) = 0$ を A の固有方程式という．これを計算するためには行列式に関係した事柄を整理しておいた方が良い．

定義（行列式）→ 宿題

σ 置換に対し　$\mathrm{sgn}(\sigma)$ で符号を表す．

- 行列式の性質
  1) 行と列について線型
  2) 行又は列の置換をすると適当に (-1) 倍される．

式で書くと　$A=(a_{ij})$, $\det A = f(a_1 \cdots a_n)$

ただし a_i は列ベクトル

$f(a_1, \cdots, \alpha a_i + \beta a_i', \cdots, a_n)$

i列を a_i から $\alpha a_i + \beta a_i'$ に変えた行列の行列式.

$= \alpha f(a_1 \cdots a_n) + \beta f(a_1 \cdots a_i', \cdots, a_n)$

(　　　)

又 σ 置換に対し

$f(a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n)}) = \boxed{} f(a_1 \cdots a_n)$

補題　$n \times n$ 行列 A, B に対し,

$$\det AB = \det A \det B$$

∵　$A = (a_{ij})$　$B = (b_{ij})$　とおくと, AB の (i,j) 成分は $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$ となる.

よって j列は

$$\begin{pmatrix} \sum a_{1k} b_{kj} \\ \vdots \\ \sum a_{nk} b_{kj} \end{pmatrix} = b_{1j} \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \cdots + b_{nj} \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

$= b_{1j} a_1 + \cdots + b_{nj} a_n$

a_1 は A の1列目のベクトル

$\det AB = f(b_{11} a_1 + \cdots + b_{n1} a_n, \cdots$

$\cdots\ b_{1n} a_1 + \cdots + b_{nn} a_n)$

$$= \sum_{j_1 \cdots j_n = 1}^{n} f(a_{j_1} \cdots a_{j_n}) b_{j_1 1} \cdots b_{j_n n}$$

A から $j_1 \cdots j_n$ 列を取り出して作った行列の行列式.

⇒ $j_1 \cdots j_n$ の中に同じ数があれば 0.

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ j_1 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$ とおけば

$$= \sum_{\sigma \in \{\text{置換の全体}\}} f(a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n)}) b_{j_1 1} \cdots b_{j_n n}$$

$$= \sum_{\sigma \in \{置換の全体\}} \mathrm{sgn}(\sigma)\, \underbrace{f(a_1 \cdots a_n)}_{\sigma と無関係}\, b_{j_1 1} \cdots b_{j_n n}$$

$$= f(a_1 \cdots a_n) \sum_{\sigma \in \{置換の全体\}} \mathrm{sgn}(\sigma)\, b_{j_1 1} \cdots b_{j_n n}$$

$$= f(a_1 \cdots a_n)\, f(b_1 \cdots b_n) = \det A \cdot \det B$$

例題

$$\det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix} = \det A_{11} \cdot \det A_{22} \quad を示せ.$$

ただし A_{11}, A_{22} は $n \times n$, $m \times m$ の行列.

解). 左辺は A_{11}, A_{12}, A_{22} の成分の関数

よって A_{11}, A_{12} の全ての成分を固定すれば,

A_{22} の成分のみの関数. よって

$$\det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix} = \cancel{c}\, f(A_{22})$$

とかける.

特に $A_{22} = E$ (単位行列) のとき.

$$\cancel{c}\, f(E) = \det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & E \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & E \end{pmatrix}$ の (i,j) 成分を a_{ij}.

$$= \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}\,\sigma \cdot a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

ここで $i \geqq m$ であれば $a_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

なので $$= \sum_{\sigma'} \mathrm{sgn}\,\sigma'\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

和は $\{1 \cdots n\}$ までの置換で取る.

$$= \det A_{11}$$

又 $f(A_{22})$ は A_{22} の行, ~~列~~ の入れかえに応じ行列式と同じ符号の変化をし, 行 ~~多列~~ に関して線型性をもつ. よって $f(A_{22}) = \alpha \det A_{22}$

$$\det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix} = \cancel{c}\,\alpha \det A_{22}$$

$A_{22} = E$ ならば $= \det A_{11}$

$$\cancel{c}\,\alpha = \det A_{11}$$

例題

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A+B)\det(A-B)$$

を示せ. ただし A, B は $n\times n$ 行列

解)

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A+B & B+A \\ B & A \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} A+B & O \\ B & A-B \end{pmatrix}$$

$$= \det(A+B)\det(A-B)$$